Capítulo 2

JNC estáticos y dinámicos con información completa

En este capítulo:

1. Analizar los **JNC** cuando la info es completa →
2. → Cuando la **estructura del juego** (i.e. el conjunto de jugadores, las reglas y las preferencias o pagos) es **conocimiento común**
3. Todos los jugadores conocen dicha estructura, todos saben que todos la conocen, todos saben que todos saben que todos la conocen…

- Cómo se representan estos juegos
- Conceptos de solución propuestos para resolverlos

Algo de notación

- Conjunto de jugadores $\mathcal{N} = \{1, \dots, i, \dots, n\}$
- ¿Qué es una acción para un jugador?
- Espacio de acciones de cada jugador i: $\mathcal{A}_i$
- $a_i \in \mathcal{A}_i$ es una acción concreta para el jugador i
- $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_i$ acción colectiva o perfil de acciones
- $\boldsymbol{a}_{-i} = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$
- $\boldsymbol{a} = (a_i, \boldsymbol{a}_{-i})$

Algo de notación: Estrategia para un jugador *i*

- Plan de acción completo de un jugador desde que empieza a jugar hasta que termina su participación en el juego
- Espacio de estrategias de cada jugador i: $\mathcal{S}_i$
- $s_i \in \mathcal{S}_i$ es una estrategia concreta para el jugador i
- $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \in \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_i$ **estrategia colectiva** o **perfil de estrategias**
- Si $\boldsymbol{s}_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$
- Entonces $\boldsymbol{s} = (s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$

Algo de notación (cont.)

- $u_i \colon \boldsymbol{s} = (s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \in \times\, \mathcal{S}_i \to \mathbb{R}$ función de pagos para cada jugador i

- $u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$ puede ser utilidad, beneficios…

Ejemplos

Emparejar monedas / “matching pennies”

- $\mathcal{N} = \{1,2\}$
- $\mathcal{A}_i = \{c, +\}, i = 1,2$

- Si se juega simultáneamente: $\mathcal{S}_i = \{c, +\}, i = 1,2$

- Pagos:

- $u_1(c, c) = u_1(+, +) = -1, u_1(c, +) = u_1(+, c) = 1$

- $u_2(c, c) = u_2(+, +) = 1, u_2(c, +) = u_2(+, c) = -1$

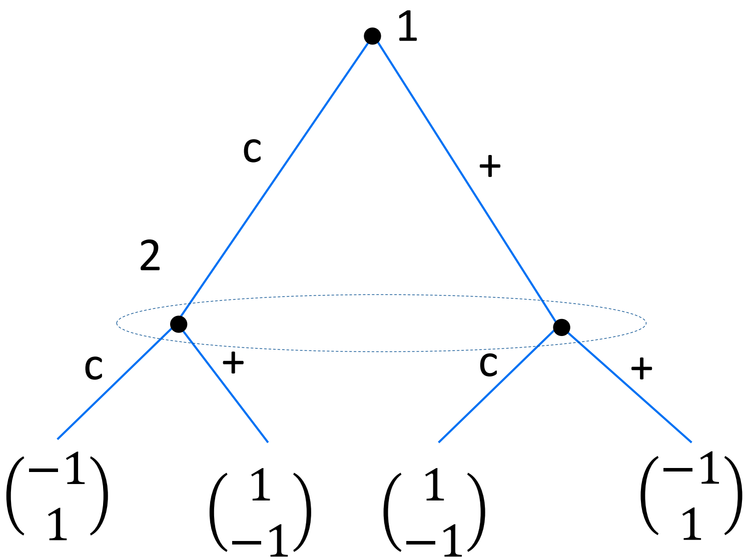
Cómo representar este juego?

- Forma normal
- UN JNC en forma normal es un trío de conjuntos $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{N}}, (u_i)_{i\in\mathcal{N}}\}$

2 1	c	+
c	$-1, 1$	$1, -1$
+	$1, -1$	$-1, 1$

El juego anterior también se podría representar …

Forma extensiva o en árbol



¿Y si este juego se jugara de forma dinámica?

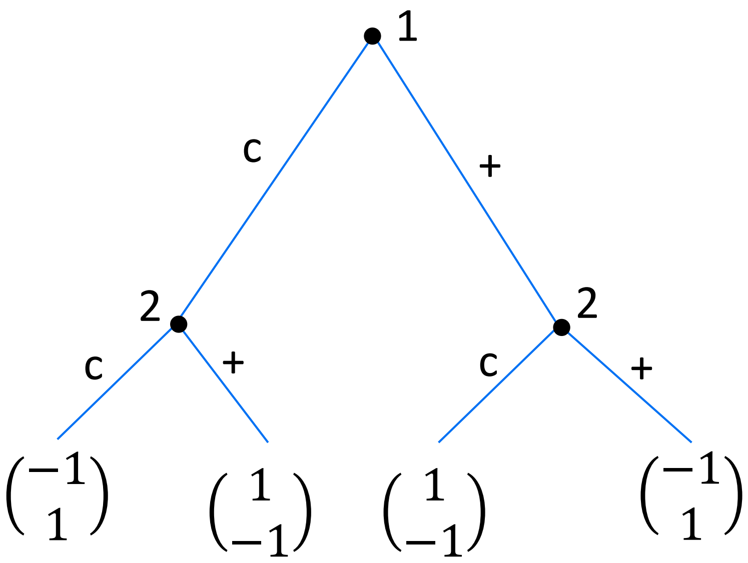
Ejemplo cont. (Emparejar monedas)

- $\mathcal{N} = \{1,2\}$
- $\mathcal{A}_i = \{c, +\}, i = 1,2$
- A partir de aquí, si se juega secuencialmente (v.gr., primero elige 1 y luego elige 2 una vez que ha observado qué ha elegido 1), el juego cambia:
- $\mathcal{S}_1 = \{c, +\}$
- Sin embargo, $\mathcal{S}_2 = \{cc, c+, +c, + +\}$
- Pagos:
- $u_1(c, cc) = u_1(c, c +) = u_1(+, c +) = u_1(+,+ +) = -1,$
- $u_1(c, +c) = u_1(c,+ +) = u_1(+, cc) = u_1(+, +c) = 1$

- Lo mismo para el jugador 2

¿Cómo se representan juegos como este?

Forma extensiva o en árbol



Pero también se podría representar matricialmente… (completar con los pagos)

2 1	cc	c+	+c	++
c				
+				

Un JNC en forma extensiva es una estructura que especifica:

1. El conjunto de jugadores $\mathcal{N}$

2. El árbol del juego: nodos y arcos que reflejan el orden en que se juega y que forman una estructura sin bucles. Cada punto donde empieza un arco es un nodo de decisión (puede ser inicial, seguidor o terminal)

3. Si $\mathcal{X}_i$ es el conjunto de nodos no terminales en los que elige i, el conjunto partición $\mathcal{P} = \{\mathcal{X}_i\}$

4. La info de cada i cuando le toca jugar. Esto no es más que una subpartición de $\mathcal{P}$ o conjunto de información $\mathcal{V}_i$

5. Si todos los conjuntos de información de todos los jugadores son uninodales, el juego es de info perfecta

6. Las opciones a disposición de cada jugador (acciones)

- Cuidado! Distinguid entre acciones y estrategias
- Una estrategia puede ser pura (no está sujeta a incertidumbre) o mixta (es una distribución de probabilidad sobre estrategias puras)
- Por ejemplo, las estrategias $\{c, +\}$ son puras
- La estrategia $(elegir\ c\ con\ prob\ p, elegir + con\ prob\ 1-p)$ es una estrategia mixta

7. Las probabilidades con las que la Naturaleza juega (si juega)

8. Los resultados o pagos para cada jugador

- En general, la forma extensiva es idónea para representar juegos secuenciales o dinámicos
- La forma estratégica, para representar juegos simultáneos
- No obstante, son intercambiables:
- Un juego secuencial también se puede representar en forma normal
- Un juego estático también se puede representar en forma extensiva.
- Problema: para un JNC en forma normal puede haber más de una forma extensiva

Dilema del prisionero

- Dos individuos, $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, son arrestados por ser sospechosos de haber cometido un crimen penado con 4 años de cárcel
- No hay evidencia plena a menos que uno confiese e inculpe al otro de la autoría del crimen. Se interrogan por separado (esto significa que el juego es simultáneo).
- Cada uno puede confesar o no confesar, $\mathcal{A}_i = \{C, N\}$
- La policía le ofrece a cada uno el siguiente trato:
- Si ninguno confiesa, N, seguirá sin haber evidencia y solo podrán ser condenados por un delito menor (sí comprobable) de tenencia de armas a 1 año de cárcel
- Si los dos confiesan (acusando uno al otro), rebaja de 1 año por colaborar con la justicia
- Si uno confiesa y el otro no, el primero quedará libre y al otro 4 años

Forma normal o estratégica

2 1	C	N
C	-3,-3	0,-4
N	-4,0	-1,-1

Relevancia de este juego

- Adam Smith: Mano invisible
- Cuando cada jugador actúa haciendo lo mejor para él, se consigue el bien común (como si una mano invisible guiase al resultado). Eficiencia paretiana

- Dilema del prisionero: Contradice este aserto
- Los jugadores actúan haciendo lo que es mejor para cada uno
- Sin embargo, el resultado colectivo no es el mejor posible (no es Pareto eficiente)

Relevancia de este juego (cont.)

- Representa muchas situaciones de la vida real en las que para el conjunto de los jugadores sería bueno que cada uno actuase de una determinada forma (todos obtendrían el mejor resultado posible)…
- …Sin embargo, la racionalidad individual impide que se alcance ese resultado
- Extensiones: Qué sucede cuando los jugadores interaccionan una y otra vez?
- Juego repetido
- Sucede/No sucede lo mismo que cuando se encuentran una sola vez (juego estático)?

Batalla de los sexos

- Dos jugadores, $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, deben decidir si asistir al ballet (B) o ir al cine (C)
- No hay comunicación previa
- Juego simultáneo
- $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i = \{B, C\}, i = 1, 2$
- Cada uno debe acudir "a ciegas" a un sitio u otro
- Cada uno tiene una afición distinta: 1 prefiere B, 2 prefiere C, si bien lo mejor para 1 sería estar en B en compañía de 2 y lo mejor para 2 sería estar en C en compañía de 1

Forma normal

2 1	B	C
B	2,1	0,0
C	-1,-1	1,2

- Aunque estamos representando estos JNC en forma normal
- También se podrían representar en forma extensiva

- ✍ **Hacer como tarea**

- ✍ **Qué relación puedes establecer entre la forma normal y la forma extensiva?**

- ✍ **Estudiar detenidamente la forma de representar JNC con tres jugadores (parte final de la Sección 2.3 del libro, pp. 32 y ss)**

Relevancia de este juego

- Pone de manifiesto los problemas de coordinación que puede haber entre los agentes

- Ejemplos:
- Conducir por la derecha o por la izquierda
- Tipos de estándar en la industria (sistema operativo, teclados, enchufes …)

Conceptos de solución para un JNC

- Cómo se comportarán los jugadores?
- **Equilibrio en estrategias dominantes (EED)**
- s_i es una **estrategia dominante** para i si $\forall \boldsymbol{s}_{-i}$ sucede

$$u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \geq u_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}), \forall s_i' \in \mathcal{S}_i$$

- Si un jugador tiene una estrategia dominante, debe utilizarla
- Un EED es un perfil de estrategias $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ formado por una estrategia dominante para cada jugador

Dilema del prisionero

- En el dilema del prisionero C es una estrategia dominante para cada jugador
- El EED es (C,C)
- **Proposición.** Si un juego tiene EED, es único
- El EED provee una previsión inequívoca del desarrollo de un juego
- Problema: ¿Y si no todos los jugadores tienen estrategias dominantes?

No existencia de EED

2 1	i	c	d
A	5, 5	0, 10	3, 4
B	3, 0	2, 2	4, 5

- En este juego ningún jugador tiene una estrategia dominante
- Quedaría sin resolver si nos ceñimos al EED
- Qué podemos hacer?
- Utilizar la **eliminación iterativa de estrategias dominadas**

- Para 2 la estrategia i resulta dominada por la estrategia c
- Dado el supuesto de racionalidad, no utilizará i
- Como 1 sabe esto, puede eliminar i de $\mathcal{S}_2$
- Una vez desechada esa parte del juego, A resulta dominada por B para 1
- …
- Una vez eliminada A de $\mathcal{S}_1$
- C resulta dominada por d para 2

- El Equilibrio por eliminación iterativa de estrategias dominadas es (B,d)

Eliminación de estrategias dominadas

- **Proposición:** Un JNC se puede resolver por eliminación iterativa de estrategias dominadas si el resultado de la iteracción es único

- Dos supuestos clave:
  - Los jugadores son racionales
  - Hay conocimiento común (en particular, con respecto a la racionalidad)

- El problema es que no todos los juegos son resolubles por eliminación de estrategias dominadas

2 1	a	b
A	3,4	4,3
M	5,3	3,5
B	5,3	4,3

- Ningún jugador tiene estrategia dominante
- Ningún jugador tiene una estrategia dominada
- No se podría resolver con ninguno de estos conceptos de solución
- Podemos razonar de la siguiente forma
- A 1 la estrategia B le da al menos el mismo pago que M
- Podríamos pensar que nunca jugará M
- Ahora bien, si 1 está seguro de que 2 va a jugar a, estaría indiferente entre jugar M o jugar B

- **Definición:** Sean $s_i, s_i' \in \mathcal{S}_i$ dos estrategias de i. Se dice que s_i está débilmente dominada por s_i' si

$$u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \leq u_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}), \forall \boldsymbol{s}_{-i} \in \times\, \mathcal{S}_{-i}$$

y

existe al menos una estrategia $\boldsymbol{s}'_{-i}$ tal que

$$u_i(s_i, \boldsymbol{s}'_{-i}) < u_i(s_i', \boldsymbol{s}'_{-i})$$

- Jugar s_i' es no peor que jugar s_i' y en algunos casos es estrictamente mejor

2 1	a	b
A	3,4	4,3
M	5,3	3,5
B	5,3	4,3

- Si eliminamos M (por estar débilmente dominada por B para 1)
- b resulta débilmente dominada por a para 2
- Llegamos a (B,a) como equilibrio por eliminación de estrategias débilmente dominadas
- También podríamos desechar B por estar débilmente dominada por A
- En ese caso obtendríamos (B,b) como equilibrio
- ¿Cuál es el equilibrio del juego? Todo un problema

Criterio de la mejor respuesta: **Equilibrio de Nash**

- **Definición:** La MR_i es el conjunto de estrategias de i que maximizan su pago, dadas las estrategias que utilizan los demás

$$MR_i = \{s_i | u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \geq u_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i})\}, \forall s_i' \in \mathcal{S}_i \text{ que no sea } s_i$$

- **Definición:** La estrategia colectiva $(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-i}^*)$ es un EN si todos los jugadores están jugando su mejor respuesta frente a las estrategias que utilizan los demás

$$u_i(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^*), \forall s_i \in \mathcal{S}_i \text{ que no sea } s_i^*$$

- Obtener el EN de los juegos

  - Los analizados anteriormente
  - Emparejar monedas
  - Dilema del prisionero

- **Proposición:** Todo EED es un EN. Lo contrario no necesariamente es cierto

- **Proposición:** Todo EN sobrevive a la eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas

- **Proposición:** Si la eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas da lugar a un resultado único, ese resultado es un EN (y además es único)

Dos problemas del EN

- Ausencia de EN
- Multiplicidad de EN

2 1	c	+
c	$-1,1$	$1,-1$
+	$1,-1$	$-1,1$

- No tiene EN en puras
- ¿Significa esto que no tiene solución?
- ¿Qué hacer?
- Podemos ampliar las opciones de los jugadores permitiendo que puedan utilizar no solo estrategias puras, sino también distribuciones de probabilidad sobre los espacios de estrategias puras

- **Definición:** Si $\mathcal{S}_i = \left\{s_i^1, \dots, s_i^k\right\}$ es el espacio de estrategias de i, $\sigma_i = (p_1, \dots, p_k)$ es una **estrategia mixta** que asigna prob p_j a la estrategia pura s_i^j, $j = 1, \dots k$, siempre que $p_j > 0$ y $\sum_j p_j = 1$

- **Definición:** Dado el JNC $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{N}}, (u_i)_{i\in\mathcal{N}}\}$, la **extensión mixta** de $\mathcal{G}$ es otro JNC en forma normal e infinito, $\tilde{\mathcal{G}} = \left\{\mathcal{N}, \left(\tilde{\mathcal{S}}_i\right)_{i\in\mathcal{N}}, (\tilde{u}_i)_{i\in\mathcal{N}}\right\}$, donde $\tilde{\mathcal{S}}_i$ es el conjunto de estrategias mixtas y $\tilde{u}_i$ es el pago esperado

Extensión mixta de emparejar monedas

		q	1-q
	2 1	c	+
p	c	-1, 1	1, -1
1-p	+	1, -1	-1, 1

- EN en estrategias mixtas: ¿Existen dos distribuciones de prob, p y q, que son un EN?
- Dado q, para que 1 esté indiferente entre c y +, ambas han de darle el mismo pago esperado; de lo contrario, optaría por la que le reportase mayor pago

$$-q + (1 - q) = q - (1 - q)$$
$$q = \frac{1}{2}$$

- Análogamente para el jugador 2:

$$p = \frac{1}{2}$$

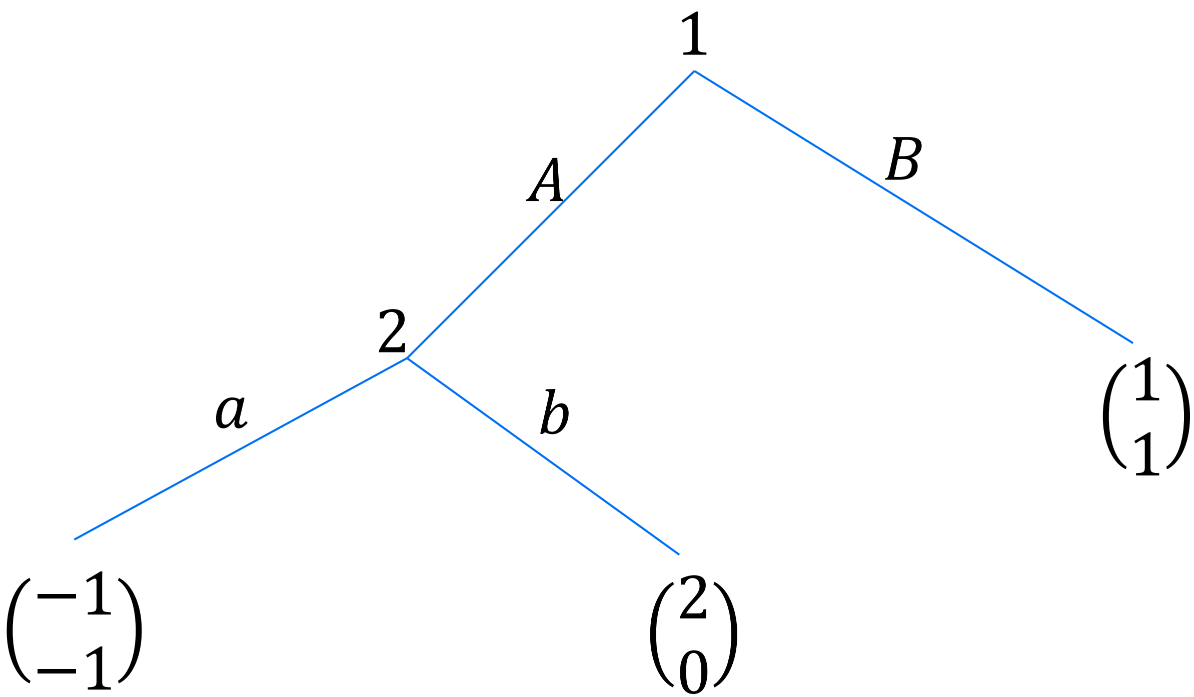
- **Proposición:** Todo JNC finito y con info perfecta tiene al menos un EN (que puede ser en estrategias mixtas)

Multiplicidad de EN

- Tres problemas cuando hay varios EN

- **1)** Juegos como la **batalla de lo sexos** tiene varios EN
- Ninguno de ellos domina Paretianamente al otro (no es posible ordenarlos)
- Podemos caer en un problema de descoordinación

- **2)** Otro problema cuando un juego tiene varios EN:
- Que alguno de los equilibrios sea poco razonable como solución del juego



- Dos EN: (A,b), (B,a)

- Para calcularlos podemos utilizar la forma normal del juego

Forma normal del juego dinámico

$S_1 = \{A, B\}$

$S_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

2 1	aa	ab	ba	bb
A	-1,-1	-1,-1	2,0	2,0
B	1,1	1,1	1,1	1,1

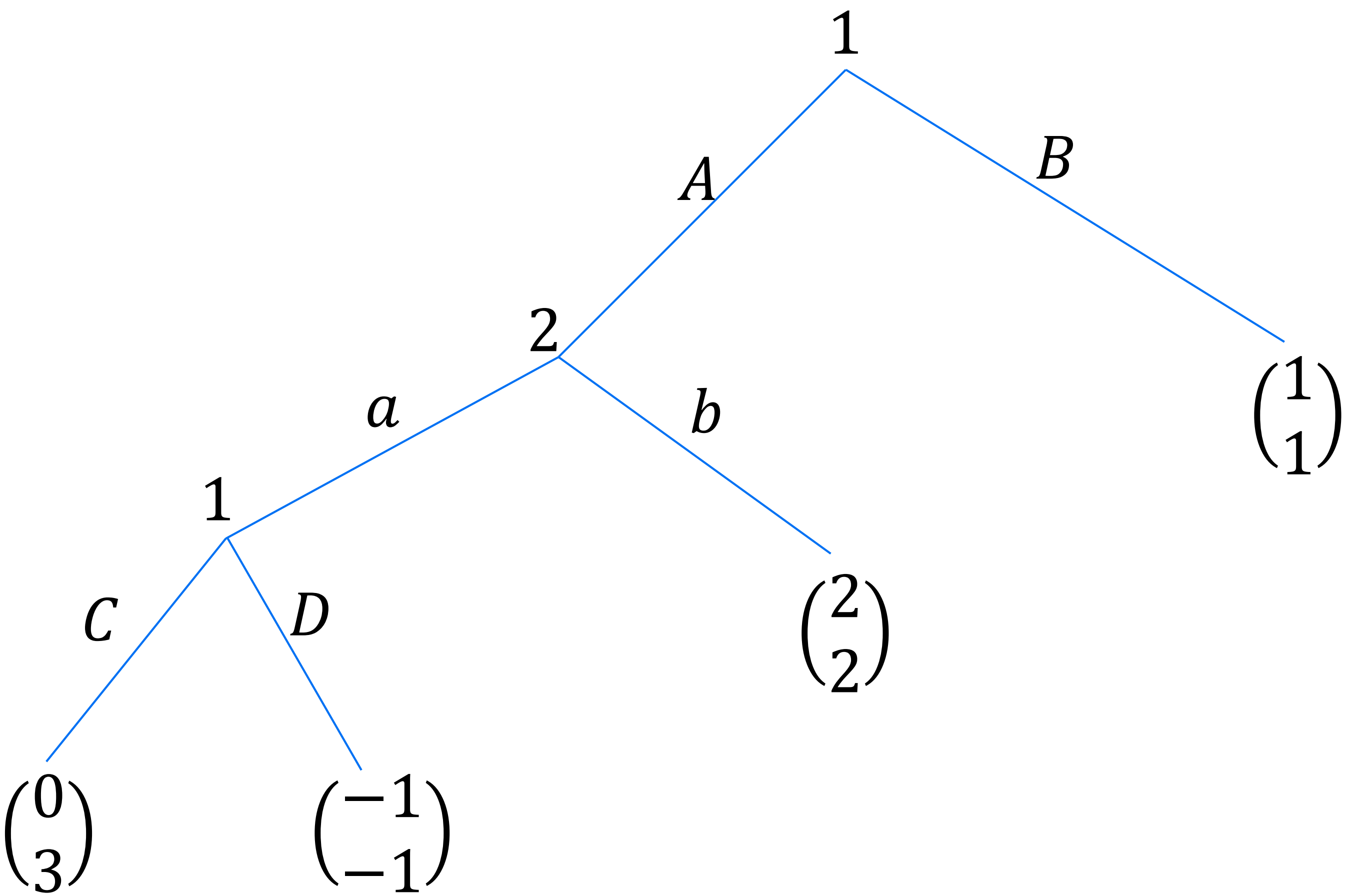
Si 1 elige A, lo mejor para 2 es ba o bb; y si 2 elige ba o bb, lo mejor para 1 es A : $(A,\, ba)$ y $(A,\, bb)$ son EN $\rightarrow$ simplificadamente **(A,b)** es EN

Si 1 elige B, lo mejor para 2 es cualquiera de sus 4 estrategias. Ahora bien, si elige ba o bb, lo mejor para 1 es A. Sin embargo, si 2 elige aa o ab, lo mejor para 1 es elegir B: $(B,\, aa)$ y $(B,\, ab)$ son EN $\rightarrow$ simplificadamente **(B,a)** es EN

Problema:

- El EN dado por **(B,a)** no tiene mucho sentido…
- … Porque está sustentado en la amenaza de 2 de jugar a si 1 juega A
- ¿Es racional dicha amenaza? Y por tanto ¿Es creíble?
- ¿O dicha amenaza un mero farol por parte del jugador 2? Y por tanto no es creíble?

- **3)** Que los jugadores se vean condenados al EN que todos desearían evitar



- Tiene tres EN: (AD,b), (BC,a) y (BD,a)
- De nuevo, se puede utilizar la forma normal para calcularlos (Hacer como tarea)
- Sin embargo, en (AD,b) la acción D por parte de 1 no es creíble
- Paradójicamente, 2 querría poder creerse que esto es una amenaza creíble…
- … Porque los EN alternativos dan peores pagos que este

Forma normal

- $S_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
- aa: Jugar a si 1 ha elegido A y jugar a si 1 ha elegido B
- ab: Jugar a si 1 ha elegido A y jugar b si 1 ha elegido B
- etc.

- $S_1 = \{ACC, ACD, ADC, ADD, BCC, BCD, BDC, DBB\}$
- ACC: Jugar A y luego, cuando vuelva a jugar, elegir C si 2 ha elegido a y elegir C si 2 ha elegido b
- ACD: Jugar A y luego, cuando vuelva a jugar, elegir C si 2 ha elegido a y elegir D si 2 ha elegido b
- …
- BCC: Jugar B y luego, cuando vuelva a jugar, elegir C si 2 ha elegido a y elegir C si 2 ha elegido b

2 1	aa	ab	ba	bb
ACC	0,3	0,3	2,2	2,2
ACD	0,3	0,3	2,2	2,2
ADC	-1,-1			
ADD				
BCC				
BCD				
BDC				
BDD				

COMPLETAR Y CALCULAR LOS EN

- **En resumen: la existencia de varios EN impide hablar de “solución” para el juego**
- Necesitamos reducir esa multiplicidad a uno solo (a ser posible)
- **Refinar los EN**
- ¿Qué criterio utilizamos para refinar? Muchos (véase p. 57 del libro)
- Depende de si el JNC es estático o dinámico
- Para JNC dinámicos, el más utilizado es el de la perfección en los subjuegos
- **EN perfecto en subjuegos**

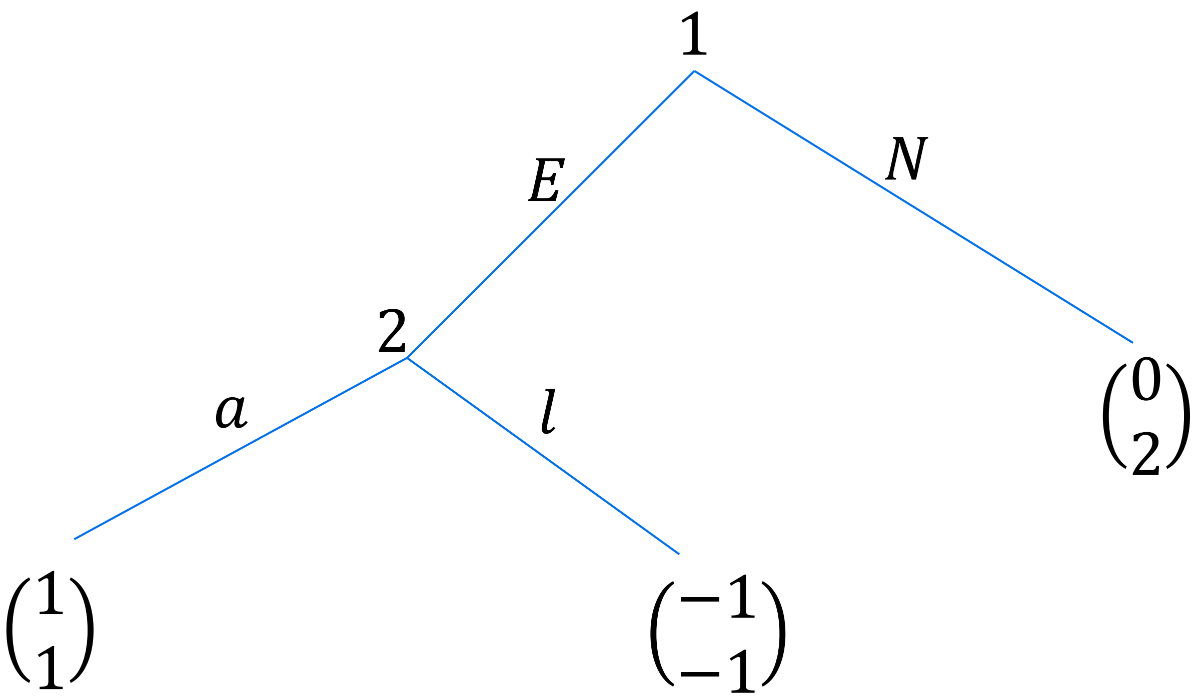
Juego de entrada

- En un mercado hay una empresa (empresa 2) que actúa como monopolista en dicho mercado y su beneficio como tal es 2

- Fuera del mercado otra empresa (empresa 1) sopesa si entrar o no entrar en ese mercado

  - Si entra, la empresa 2 debe decidir si acepta sin más la entrada o si lucha contra ella (con una guerra de precios, p. e.)

- $A_1 = \{E, N\} \qquad A_2 = \{a, l\}$



- Dos EN: (E,a) y (N,l)
- Sin embargo, el EN (N,l) no tiene mucho sentido
- Esta sustentado en la amenaza de 2 de jugar l si 1 juega E
- ¿Es racional? ¿O es un mero farol?

Forma normal

$$S_1 = \{E, N\}$$

$$S_2 = \{aa, al, la, ll\}$$

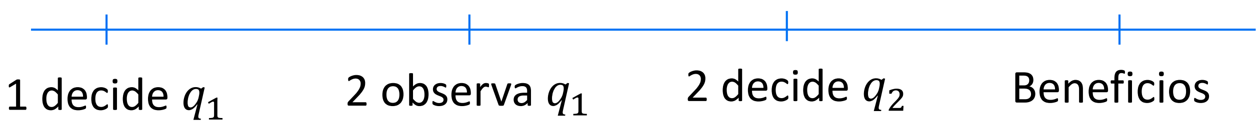
2 / 1	aa	al	la	ll
E	1,1	1,1	-1,-1	-1,-1
N	0,2	0,2	0,2	0,2

- Los EN basados en amenazas no creíbles deberían descartarse como razonables
- Y quedarnos con los EN que superan ese criterio
- Que son EN en todos y cada uno de los subjuegos del juego: no solo en los subjuegos a los que se llega por el desarrollo del juego, sino también a los que quedan fuera de la senda del equilibrio
- **Definición:** Un subjuego de un juego en forma extensiva es una parte del juego que:
  - Empieza en un nodo que define por sí mismo un conjunto de información
  - Contiene todos los nodos que siguen a este y solo estos
  - Si contiene un nodo de un conjunto de información, contiene a todo el conjunto de información

- ¿Cuántos subjuegos tiene el juego de entrada?
- Dos
  - Un subjuego es el juego en su totalidad
  - Otro subjuego es la parte del juego que empieza en el nodo en el que le toca a 2 jugar
- De los EN del juego, ¿Cuál es EN en todos y cada uno de los subjuegos del juego?
- ¿Cómo se determina el ENPS?
- Por inducción hacia atrás

Un ejemplo económico

- Dos empresas (1 y 2)
- Cada una decide cuánto producir
- La empresa 1 decide el output antes que la empresa 2
- Empresa 1 es líder; empresa 2 es seguidora



- ¿Cómo toma la empresa 1 su decisión?