Capítulo 4

Información incompleta y juegos estáticos

Hasta ahora:

Hemos asumido que todo en el juego es **conocimiento común**

En particular, que las funciones de pago de los jugadores son tales que:

Cada jugador conoce su función de pagos

Cada jugador conoce las funciones de pagos de todos los demás

Y que esto es conocimiento común

Supuesto discutible:

Subastas

Competencia entre empresas

Aportación a un bien público…

Juegos con información incompleta (o Bayesianos)

- Un juego Bayesiano estático es un JNC cuya forma normal es el conjunto de los siguientes cinco conjuntos:
  - Un conjunto de jugadores $\mathcal{N} = \{0 \text{ o } N, 1, \ldots, n\}$
  - Para cada jugador i el conjunto de acciones/estrategias, $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i$
  - Para cada jugador i un conjunto de posibles tipos de i, $\mathcal{T}_i$, siendo cada tipo $t_i \in \mathcal{T}_i$ una especificación de la información privada de i
  - Para cada jugador i una distribución de probabilidad sobre los posibles tipos de los rivales, $p_i \colon \mathcal{T} \to [0, 1]$, siendo $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n$
  - Para cada jugador i una función de pagos $u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n; p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n) \colon \mathcal{S} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$

- En definitiva,

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{N}; \{\mathcal{S}_i\}_{i\in\mathcal{N}}; \{\mathcal{T}_i\}_{i\in\mathcal{N}}; \{p_i\}_{i\in\mathcal{N}}: \mathcal{T} \to [0,1]; \{u_i\}_{i\in\mathcal{N}}\}$$

- El tipo t_i solo es conocido por i (información privada)

- Utiliza esta información para tomar decisiones y para actualizar sus creencias sobre los tipos de los jugadores rivales utilizando la probabilidad condicional $p_i(\boldsymbol{t}_{-i}|t_i)$

Cómo se desarrolla un juego Bayesiano estático (JBE)? Interpretación de Harsanyi

- N extrae un vector de tipos $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)$, de acuerdo con la distribución de probabilidad p, donde t_i es una extracción del conjunto $\mathcal{T}_i$

- Cada jugador i es informado de la realización de su propio tipo t_i (info privada), pero no de las realizaciones de los tipos de los demás jugadores

- Los jugadores conocen la distribución de probabilidad de la que emergen los tipos $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \rightarrow p(\boldsymbol{t})$

- Los jugadores eligen, simultáneamente, acciones $a_i \in \mathcal{A}_i$

- Los jugadores reciben los pagos correspondientes

Tres aspectos a destacar:

1) Hay un nuevo jugador (N) que revela el tipo t_i al jugador i solamente

- Entonces, la información incompleta se transforma en información imperfecta (el movimiento de N no es perfectamente observado)
- Por tanto, los jugadores no saben todo lo que ha pasado en el juego cuando les toca mover

2) Restringimos la atención al caso en el que los tipos son independientes

3) Una vez que cada jugador i conoce su tipo, sus creencias respecto al tipo del resto de jugadores se forman mediante la regla de Bayes

$$p_i(\boldsymbol{t}_{-i}|t_i) = \frac{p(\boldsymbol{t}_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(\boldsymbol{t}_{-i}, t_i)}{\sum_{\boldsymbol{t}_{-i} \in \mathcal{T}_{-i}} p(t_i)}$$

donde $p_i(\boldsymbol{t}_{-i}, t_i)$ es la probabilidad de que N extraiga el tipo t_i para el jugador i y los tipos $\boldsymbol{t}_{-i}$ para los demás jugadores, y $p(t_i)$ es la probabilidad (marginal) de que N extraiga el tipo t_i para el jugador i

Concepto de solución en un JB estático

- Equilibrio Bayesiano de Nash, equilibrio Nash-Bayes o equilibrio Bayesiano a secas

- Para definirlo, necesitamos definir el concepto de estrategia en un JB estático (JBE)

- **Estrategia en un JBE**: *En un JBE como* $\mathcal{G} = (\mathcal{N}; \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n; \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n; p_1, \dots, p_n; u_1, \dots, u_n)$ *una estrategia (pura) para el jugador i es una función* $s_i(t_i): \mathcal{T}_i \rightarrow \mathcal{A}_i$ *que especifica, para cada tipo* $t_i \in \mathcal{T}_i$*, la acción del conjunto factible* $\mathcal{A}_i$ *que i elegiría para cada uno de sus posibles tipos y no solo para el tipo en el que realmente se ha encarnado*

- Una estrategia (pura) para un jugador i es una función del espacio de tipos en el espacio de acciones, $s_i\colon \mathcal{T}_i \rightarrow \mathcal{A}_i$, con elementos $s_i(t_i)$, y que determina, para cada tipo t_i, la acción del conjunto factible $\mathcal{A}_i$ que i elegiría si el azar determinase que es de tipo t_i, y esto para cada realización posible de su tipo

  - En una estrategia separadora, el jugador i elige una estrategia diferente, según el tipo en el que se encarne, es decir, $s_i(\hat{t}_i) \neq s_i(\bar{t}_i)$ para $\hat{t}_i \neq \bar{t}_i$

  - En una estrategia agrupadora, el jugador i elige siempre la misma estrategia, cualquiera que sea su tipo, esto es, $s_i(t_i) = s_i$, para todo $t_i \in \mathcal{T}_i$

- Cada jugador calcula sus pagos a partir de su expectativa sobre tipos utilizando sus creencias condicionales sobre los tipos de los jugadores rivales

- Por lo tanto, si i utiliza la estrategia pura s_i, los otros jugadores utilizan las estrategias $\boldsymbol{s}_{-i}$ y el tipo del jugador i es t_i, su pago esperado es

$$Eu_i\left(s_i \middle| \boldsymbol{s}_{-i}, t_i\right) = \sum_{\boldsymbol{t}_{-i} \in \mathcal{T}_i} u_i\left(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i}), t_i, \boldsymbol{t}_{-i}\right) \times p\left(\boldsymbol{t}_{-i} \middle| t_i\right)$$

- **Definición.** *En el JBE $\mathcal{G}$ el perfil de estrategias $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ es un EB si para cada jugador i y para cada uno de sus tipos t_i, $s_i^*(t_i)$ resuelve el problema*

$$\max_{s_i} \sum_{\boldsymbol{t}_{-i}} p_i(\boldsymbol{t}_{-i}|t_i) \times u_i(s_1^*(t_1), \dots, s_i, \dots, s_n^*(t_n); t_i)$$

y donde la probabilidad condicional $p_i(\boldsymbol{t}_{-i}|t_i)$ se calcula mediante la regla de Bayes

Proposición. *Todo JBE finito tiene un equilibrio de Nash-Bayes (en estrategias mixtas)*

Ejemplo 1

- Los jugadores 1 y 2 juegan el siguiente juego simultáneo

- El jugador 1 puede elegir la acción A o la acción B, mientras que el jugador 2 puede elegir la acción a o la acción b: $\mathcal{A}_1 = \{A, B\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{a, b\}$

- El jugador 1 puede ser de tipo x o de tipo z, $\mathcal{T}_1 = \{x, z\}$, mientras que el jugador 2 tiene un único tipo, el cual es de dominio público

- El jugador 1 conoce su tipo

Ejemplo 1

- El jugador 2 no sabe de qué tipo es el jugador 1, ya que se supone que la *Naturaleza* (jugador 0) ha elegido, a través de un mecanismo aleatorio, el tipo de 1

- Lo que sí conoce el jugador 2 es la distribución de probabilidad de la que proceden los tipos del jugador 1. En particular, sabe que el jugador 1 puede ser de tipo $t_1 = x$ o de tipo $t_1 = y$ con la misma probabilidad: $\Pr(x) = \frac{1}{2}$

- Es lo mismo que decir que 2 no tiene tipos. En general, el jugador informado (con información privada) tiene tipos, mientras que el jugador no informado carece de ellos

Forma normal

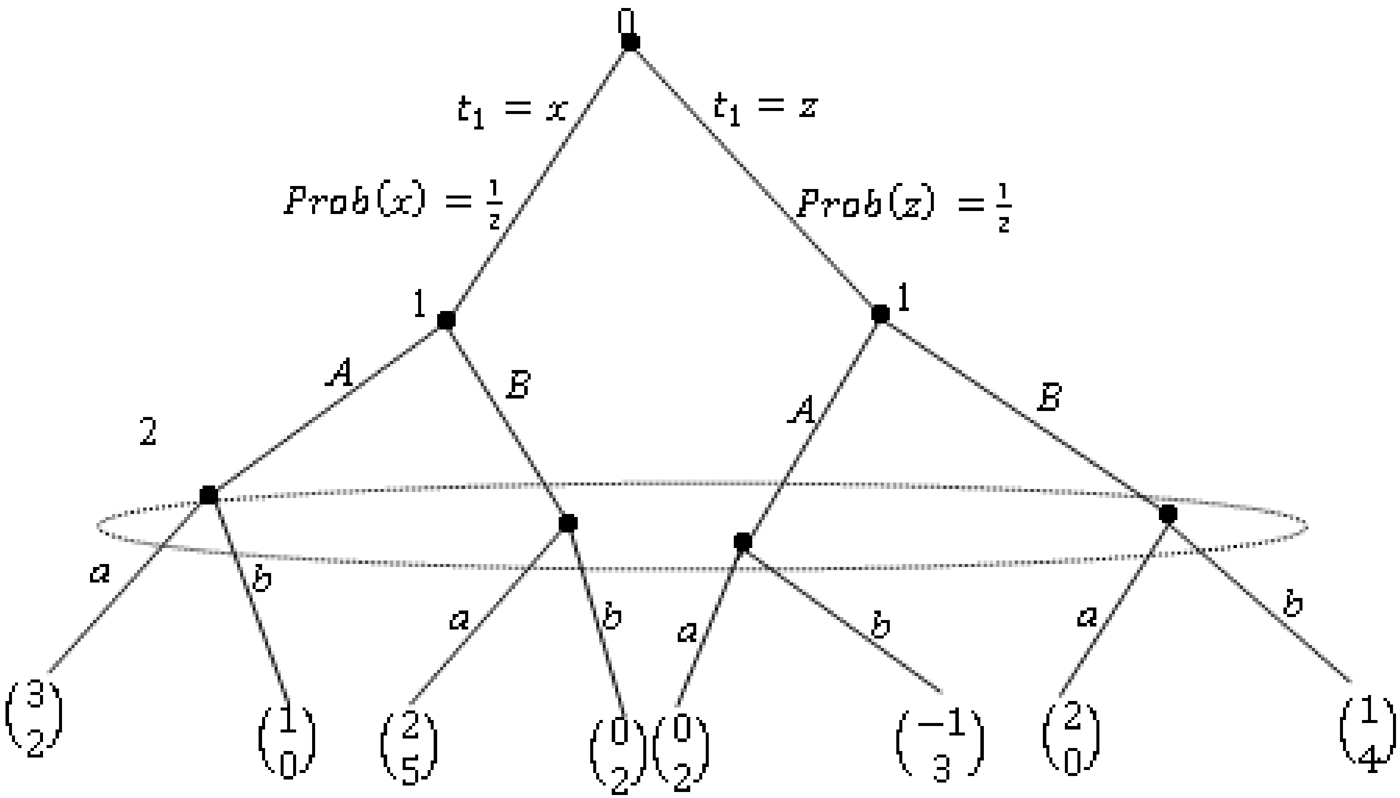
Jugador 1 de tipo x

2 / 1	a	b
A	3 ,2	1, 0
B	2, 5	0, 2

Jugador 1 de tipo z

2 / 1	a	b
A	0, 2	-1, 3
B	2, 0	1, 4

Forma extensiva



- $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$

- $\mathcal{S}_1 = \{AA, AB, BA, BB\}$, ya que tiene dos tipos posibles y dos opciones al alcance de cada tipo

  - En particular, puede elegir A si $t_1 = x$ y A si $t_1 = z$, A si $t_1 = x$ y B si $t_1 = z$, B si $t_1 = x$ y A si $t_1 = z$, B si $t_1 = x$ y B si $t_1 = z$.

- $\mathcal{S}_2 = \{a, b\}$, ya que no tiene tipos (su conjunto de tipos es un *singleton*) y, en consecuencia, sus estrategias coinciden con sus acciones

- El jugador 1 puede ser de varios tipos, lo cual significa que tiene información privada. Un tipo concreto es cualquier valor concreto del conjunto de tipos

- El jugador 2 no tiene tipos, por lo que la información que posee es de dominio público (carece de información privada)

- Cada jugador conoce su tipo y, por ende, su función de pagos

- Sin embargo, el jugador 2 no conoce el tipo de 1 y solo tiene creencias (una distribución de probabilidad) sobre el tipo de 1. Estas creencias (a priori) viene dadas por $Prob(t_1 = x) = \frac{1}{2}$

- $u_i(s_1, s_2;\ t_1)$, donde $s_1 \in \mathcal{S}_1$, $s_2 \in \mathcal{S}_2$, $t_1 \in \mathcal{T}_1$, siendo $\mathcal{T}_1$ el conjunto de posibles tipos del jugador 1 (los tipos del jugador 2 no se incluyen porque este jugador no tiene tipos)

Comportamiento del jugador 1

- El jugador 1 conoce tanto su tipo como el tipo del jugador 2.
  - Si es de tipo x, la estrategia B está estrictamente dominada por la estrategia A, con lo cual su mejor estrategia ante cualquier estrategia del jugador 2 será A

$$MR_{1x} = MR_{1x} = \begin{cases} A, si\ s_2 = a \\ A, si\ s_2 = b \end{cases}$$

  - Si es de tipo z, la estrategia A está estrictamente dominada por B, por lo que su mejor estrategia para cualquier estrategia que utilice el jugador 2 será B

$$MR_{1z}(a) = MR_{1z}(b) = B$$

- En definitiva, el jugador 1 tiene, como estrategias dominantes, jugar A si es de tipo x y jugar B si es de tipo z. Su mejor respuesta a lo que haga el jugador 2 será, pues, AB

Comportamiento del jugador 2

- Evalúa su pago esperado jugando a y su pago esperado jugando b para las estrategias que pueda utilizar 1, que son las dadas por el conjunto $\mathcal{S}_1 = \{AA, AB, BA, BB\}$, y donde, por ejemplo, AA significa que el jugador 1 juega A si es de tipo x y juega A si es de tipo z

- El pago esperado para el jugador 2 de jugar a es

$$\left.\begin{aligned} Eu_2(a, AA) &= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 2 \\ Eu_2(a, AB) &= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 0 = 1 \\ Eu_2(a, BA) &= \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{7}{2} \\ Eu_2(a, BB) &= \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{5}{2} \end{aligned}\right\}$$

- El pago esperado para el jugador 2 de jugar b es

$$\left.\begin{aligned}
Eu_2(b, AA) &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \\
Eu_2(b, AB) &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 4 = 2 \\
Eu_2(b, BA) &= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{5}{2} \\
Eu_2(b, BB) &= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 = 3
\end{aligned}\right\}$$

- Comparando los pagos esperados, se obtiene

  - $MR_2(AA) = a$
  - $MR_2(AB) = b$
  - $MR_2(BA) = a$
  - $MR_2(BB) = b$

- como mejores respuestas del jugador 2

- Por lo tanto, si la estrategia óptima del jugador 1 es jugar AB, la mejor respuesta del jugador 2 es $MR_2(AB) = b$

- **Proposición:** *El EB del juego es el conjunto de estrategias* $\{s_1^*(t_1 = x) = A,\, s_1^*(t_1 = z) = B,\, s_2^* = b\}$

Ejemplo 2

- Los jugadores 1 y 2 juegan el siguiente juego simultáneo:

- El jugador 1 es de un solo tipo

- El jugador 2 puede ser de tipo -1 o de tipo 1

- El jugador 1 no conoce de qué tipo es el jugador 2, pero sí conoce la distribución de probabilidad de la que procede dicho tipo

- Esa distribución de probabilidad es: $\Pr(t_2 = -1) = p$, $0 < p < 1$

- El conjunto de acciones de cada jugador y los pagos que puede obtener se especifican en la siguiente tabla

2 1	A	B
D	$2, t_2$	$-4, 0$
C	$0, 4$	$0, 4$
I	$-4, 0$	$2, -t_2$

- El jugador 2 tiene una estrategia (débilmente dominante), con lo cual la utilizará, independientemente de lo que haga el jugador 1. Formalmente

$$MR_2 = \begin{cases} B, \text{si es de tipo } t_2 = -1 \\ A, \text{si es de tipo } t_2 = 1 \end{cases}$$

- Supongamos ahora que el jugador 1 cree que el jugador 2 jugará A cuando es de tipo $t_2 = -1$ (suceso que ocurre con probabilidad p) y jugará B cuando $t_2 = 1$ (probabilidad de ocurrencia $1 - p$). Entonces, el pago esperado para 1 es:

$$Eu_1 = \begin{cases} p2 - (1-p)4 = 6p - 4, \text{si juega } D \\ p(0) + (1-p)0 = 0, \qquad \text{si juega } C \\ p(-4) + (1-p)2 = 2 - 6p, \text{si juega } I \end{cases}$$

- con lo cual su mejor respuesta es

$$MR_1 = \begin{cases} I, \text{si } p < \dfrac{1}{3} \\ C, \text{si } \dfrac{1}{3} < p < \dfrac{2}{3} \\ D, \text{si } p > \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

- **Proposición .** *Los EB de este juego son:*
  - *Si* $p < \frac{1}{3}$, $\{(s_1^* = I, s_2^*(-1) = B, s_2^*(1) = A)\}$, es decir, (I,BA)
  - *Si* $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$, $\{(s_1^* = C, s_2^*(-1) = B, s_2^*(1) = A)\}$, es decir, (C,BA)
  - *Si* $p > \frac{2}{3}$, $\{(s_1^* = D, s_2^*(-1) = B, s_2^*(1) = A)\}$, es decir, (D,BA)
  - *Si* $p = \frac{1}{3}$, $\{(s_1^* = I, s_2^*(-1) = B, s_2^*(1) = A); (s_1^* = C, s_2^*(-1) = B, s_2^*(1) = A)\}$, es decir, (I,BA) o (C,BA)
  - *Si* $p = \frac{2}{3}$, $\{(s_1^* = C, s_2^*(-1) = B, s_2^*(1) = A); (s_1^* = D, s_2^*(-1) = B, s_2^*(1) = A)\}$, es decir, (C,BA) o (D,BA)

Ejemplo 3

- La información incompleta no es exclusiva de las situaciones en las que un jugador no conoce los pagos de los oponentes
- También puede existir si un jugador no conoce las preferencias del rival o rivales
- Imaginemos que los jugadores 1 y 2 tienen que decidir, simultáneamente, dónde pasar la tarde
- Cada uno puede optar por asistir al ballet o ir al cine, $\mathcal{A}_i = \{B, C\}$, $i = 1{,}2$

- El jugador 1 es forofo del ballet y al jugador 2 le gusta el cine
- El jugador 2 puede estar animado o desanimado, $\mathcal{T}_2 = \{a, d\}$, y sus preferencias varían en cada caso:
    - si está animado, prefiere la compañía del jugador 1
    - si está desanimado, prefiere estar solo/a
- El jugador 1 no conoce con certeza las preferencias (estado de ánimo) del jugador 2 y cree que, con probabilidad p, $0 < p < 1$, estará animado

Forma normal o estratégica

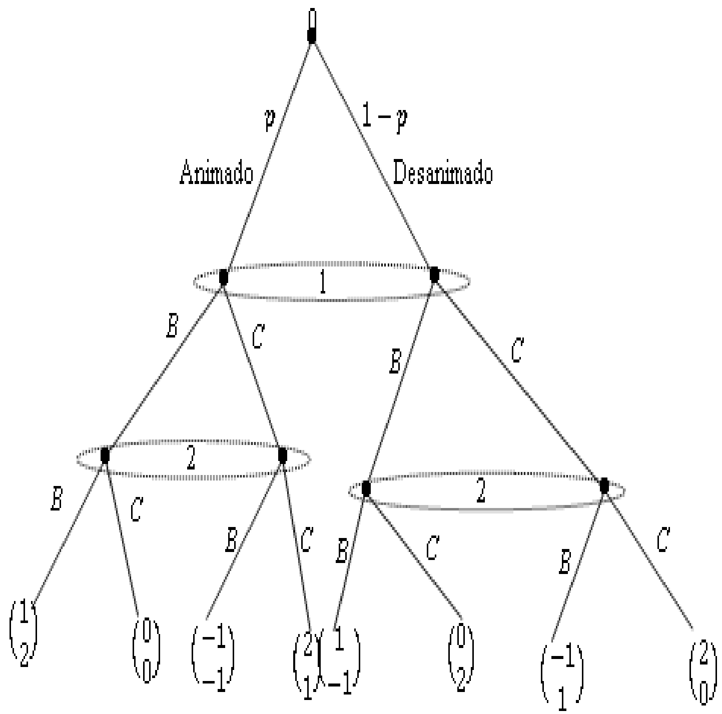
Jugador 2 *animado*

2 / 1	B	C
B	1, 2	0, 0
C	-1, -1	2, 1

Jugador 2 *desanimado*

2 / 1	B	C
B	1, -1	0, 2
C	-1, 1	2, 0

Forma extensiva



Ahora, las estrategias de cada jugador indican una acción para cada tipo posible en el que pueda encarnarse

El jugador 1 solo tiene un estado emocional posible, por lo su espacio de estrategias coincide con el de acciones, $\mathcal{S}_1 = \{B, C\}$

El jugador 2, sin embargo, tiene dos estados de ánimo posibles y, en consecuencia, su espacio de estrategias es $\mathcal{S}_2 = \{BB, BC, CB, CC\}$, donde la estrategia BB, por ejemplo, significa que elige B cuando se encuentra animado y elige también B cuando está desanimado, BC …

Pagos esperados del jugador 1:

2 / 1	BB	BC	CB	CC
B	$p \cdot 1 + (1-p)1 = 1$	p	$1-p$	0
C	$p \cdot (-1) + (1-p)(-1) = -1$	$2-3p$	$3p-1$	p

$$MR_1(s_2) = \begin{cases} B, & \text{si } s_2 = BB \\ \left.\begin{array}{c} B, \text{si } p > \dfrac{1}{2} \\ B \text{ o } C, \text{si } p = \dfrac{1}{2} \\ C, \text{si } p < \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}, & \text{si } s_2 = BC \\ \left.\begin{array}{c} B, \text{si } p > \dfrac{1}{2} \\ B \text{ o } C, \text{si } p = \dfrac{1}{2} \\ C, \text{si } p < \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}, & \text{si } s_2 = CB \\ C, & \text{si } s_2 = CC \end{cases}$$

y

$$MR_2(s_1) = \begin{cases} BC, si\, s_1 = B \\ CB, si\, s_1 = C \end{cases}$$

- **Proposición.** *El juego descrito en el Ejemplo 3 tiene los siguientes EB:*
- *Si* $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\{(s_1^* = C, s_2^*(a) = C, s_2^*(d) = B)\}$
- *Si* $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\{(s_1^* = B, s_2^*(a) = B, s_2^*(d) = C)\}$
- *Si* $p = \frac{1}{2}$, $\{(s_1^* = C, s_2^*(a) = C, s_2^*(d) = B); (s_1^* = B, s_2^*(a) =$

¿Es siempre mejor tener más información?

- Consideremos la siguiente situación:

Jugador 2 de tipo x

2 / 1	a	b	c
A	4,2	4,2	4,0
B	6,6	0,10	0,0

Jugador 2 de tipo z

2 / 1	a	b	c
A	4,2	4,0	4,3
B	6,6	0,0	0,10

- Empecemos suponiendo que ningún jugador sabe si la verdadera matriz de pagos del juego es la izquierda o la derecha (info simétrica)
- Lo único que los dos saben es que la probabilidad de que sea una u otra es 1/2

- Si ningún jugador tiene info privada, $\mathcal{A}_1 = \{A, B\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{a, b, c\}$

- Supongamos que el jugador 1 juega la estrategia A:
- $\Rightarrow$ El jugador 2 gana 2 si juega a, gana 1 jugando b y gana $\frac{3}{2}$ jugando c $\rightarrow$ Elegirá a

- Supongamos ahora que el jugador 1 elige la estrategia B:

- $\Rightarrow$ El jugador 2 gana 6 eligiendo a, gana 5 eligiendo b y también gana 5 eligiendo c $\rightarrow$ Elegirá a. A su vez, si el jugador 2 elige a, el jugador 1 gana 4 eligiendo la estrategia A y gana 6 eligiendo la estrategia B $\rightarrow$ mejor respuesta de 1 a la elección de 2 es jugar B

- **Proposición.** *Si los jugadores tienen información simétrica, el EB del juego es el perfil de estrategias* $\{(s_1^* = B, s_2^* = a)\}$

- Y los pagos que, en el EB, reciben los jugadores son los dados por el vector $(u_1^*, u_2^*) = (6,6)$

- Supongamos ahora que el jugador 2 sabe con certeza cuál es exactamente la matriz del juego

- Esto equivale a que:
  - el jugador 2 puede ser de dos tipos y
  - el jugador 1 no sabe el tipo concreto del jugador 2

- Con respecto a la situación anterior (información simétrica), el jugador 2 tiene ahora más información que el jugador 1 (info asimétrica). En este caso,
  - $\mathcal{A}_1 = \{A, B\}$,
  - mientras que $\mathcal{A}_2 = \{aa, ab, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$, ya que tiene dos conjuntos de información, cada uno con un nodo y con tres opciones

- Ahora en la matriz de la izquierda, b es una estrategia dominante para el jugador 2, mientras que en la matriz de la derecha c es una estrategia dominante para dicho jugador
- $\Rightarrow$ si 2 juega bc, el pago para el jugador 1 es 4 si juega A y 0 si juega B. Por lo tanto, jugará A

- **Proposición.** *Si el jugador* 2 *posee info privada sobre su tipo, el EB del juego (de información incompleta) es el conjunto de estrategias* $\{(s_1^* = A, s_2^*(x) = c, s_2^*(z) = b)\}$. Es decir, (A, cb)

- Los pagos de los jugadores vienen dados por $(u_1^*, u_2^*) = \left(4, \frac{5}{2}\right)$

- **Proposición.** *El pago del jugador 2 es menor cuando tiene ventaja informativa que cuando no la tiene*

- Cuando el jugador 2 carece de información privada (no tiene ventaja informativa con respecto al jugador 1) y, por tanto, utiliza las dos matrices para tomar su decisión, a es la opción óptima

- Esta opción deja de ser óptima cuando el jugador 2 posee info privada y, por tanto, **tiene más info** que en el contexto anterior. En este caso, la opción óptima para el jugador 2 es b cuando la matriz relevante es la izquierda y c cuando es la derecha