# Capítulo 5

# Aplicando los juegos estáticos con información incompleta

# Algunos ejemplos

Dos o más empresas que compiten en un mercado: cada una conoce sus costes pero no los costes de las rivales

Un objeto que se subasta: cada licitante conoce el valor que el objeto tiene para él, pero no el que tiene para cada uno de los demás licitantes

Un laboratorio de investigación que tiene una patente: no sabe qué valor de mercado tiene esa patente

Una administración pública que quiere construir una determinada infraestructura: no sabe el coste de construcción de la misma

El vendedor de un producto: conoce la calidad del mismo, mientras que los compradores no la conocen

# Competencia Cournot

- Consideremos el siguiente juego Bayesiano
- Dos empresas: $\mathcal{N} = \{1, 2\}$
- El producto es homogéneo
- La función de demanda es $p(Q) = \text{máx}\,\{0, a - (q_1 + q_2)\}$
- Para cada jugador $i$ el conjunto de acciones/estrategias es $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i = [0, \overline{q}_i]$
- La empresa 1 tiene los costes $\underline{c}q_1$ o $\overline{c}q_1$, $\mathcal{T}_1 = \{\underline{c}, \overline{c}\}$; solo ella sabe cuál es exactamente
- La empresa 2 solo conoce la función de distribución de los costes de 1. Cree que el coste marginal de la empresa 1 es $\underline{c}$ con probabilidad $\gamma$, $0 < \gamma < 1$, o $\overline{c}$ con probabilidad $1 - \gamma$

- Al mismo tiempo, la función de costes de la empresa 2 es con seguridad $cq_2$, $0 \leq \underline{c} < c < \overline{c}$
- Empresa 1 = empresa informada; empresa 2 = empresa no informada
- Solo la empresa 1 tiene tipos; la empresa 2 no
- La estrategia óptima de cada empresa es decidir, para cada uno de los tipos en los que podría encarnarse, la cantidad que constituya la MR según sus creencias sobre los tipos de la empresa rival

- Un **equilibrio de Cournot Bayesiano** se identifica con tres niveles de output: un nivel de producción para la empresa 1 de tipo $\underline{c}$, $q_1(\underline{c})$, un nivel de producción para la empresa 1 de tipo $\overline{c}$, $q_1(\overline{c})$, y un nivel de producción para la empresa 2, $q_2$

$$\{q_1(\underline{c}), q_1(\overline{c}), q_2\}$$

- Si la empresa 1 es de tipo $\underline{c}$, su función de beneficios es

$$\pi_1(\underline{c}) = (a - q_1(\underline{c}) - q_2 - \underline{c})q_1(\underline{c})$$

y la CPO da lugar a

$$q_1(\underline{c}; q_2) = \frac{a - \underline{c} - q_2}{2}$$

como MR frente a $q_2$

- Análogamente, si la empresa 1 es de tipo $\overline{c}$, entonces

$$q_1(\overline{c}; q_2) = \frac{a - \overline{c} - q_2}{2}$$

- A su vez, el beneficio esperado de la empresa 2 es

$$E[\pi_2] = \gamma\left(a - q_1\left(\underline{c}\right) - q_2 - c\right)q_2 +$$

$$+(1-\gamma)(a - q_1(\overline{c}) - q_2 - c)q_2 =$$

$$= \left(a - c - \left(\gamma q_1\left(\underline{c}\right) + (1-\gamma)q_1(\overline{c})\right) - q_2\right)q_2$$

De aquí, resulta

$$q_2\left(c; q_1(\underline{c}), q_1(\overline{c})\right) = \frac{a - c - \left(\gamma q_1(\underline{c}) + (1-\gamma) q_1(\overline{c})\right)}{2}$$

- **Proposición:** *En un duopolio de Cournot con información incompleta (siendo la empresa* 1 *el jugador informado y la empresa* 2 *el desinformado) el EB es el conjunto de estrategias*

$$\left\{\left(q_1^*(\underline{c}), q_1^*(\overline{c}), q_2^*\right)\right\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{a - (2+\gamma)\underline{c} - (1-\gamma)\overline{c} + 2c}{4}, \frac{a - (3-\gamma)\overline{c} - \gamma\underline{c} + 2c}{4}, \frac{a - 2c + \gamma\underline{c} + (1-\gamma)\overline{c}}{2}\right)\right\}$$

- A partir de la situación de **información incompleta**, los valores extremos $\gamma = 1$ y $\gamma = 0$ definen sendos casos particulares de **información completa**

- El valor $\gamma = 1$ refleja que es de dominio público que la empresa 1 es de tipo $\underline{c}$, por lo que la información es completa

- El valor $\gamma = 0$ representa que es de dominio público que la empresa 1 es de tipo $\overline{c}$ y, por tanto, la información vuelve a ser completa

- Del equilibrio Bayesiano es fácil derivar, pues, el equilibrio de Nash si el juego se desarrollase en condiciones de **información completa**

Resultados para las empresas y los consumidores en información completa (IC) e incompleta (II) (valores de los parámetros: $a = 1$, $c = \frac{1}{8}$, $\underline{c} = 0$, $\overline{c} = \frac{1}{4}$ y $\gamma = \frac{1}{2}$)

| | $q_1$ | $q_2$ | $Q = q_1 + q_2$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| **Información completa y empresa 1 tipo $\underline{c}$** | $\frac{10}{32}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{22}{32}$ | $\frac{10}{32}$ |
| **Información incompleta y empresa 1 tipo $\underline{c}$** | $\frac{9}{32}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{23}{32}$ | $\frac{9}{32}$ |
| **Información completa y empresa 1 tipo $\overline{c}$** | $\frac{4}{32}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{20}{32}$ | $\frac{12}{32}$ |
| **Información incompleta y empresa 1 tipo $\overline{c}$** | $\frac{5}{32}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{19}{32}$ | $\frac{13}{32}$ |

Si 1 es $\underline{c}$, produce menos en II que en IC → Su beneficio en II es menor que en IC

Por qué? En II 2 no sabe que 1 es de tipo $\underline{c}$ → 2 produce más que si supiese

que 1 es de tipo $\underline{c}$ → La MR de 1 es reducir su producción

**Si la competencia es mediante cantidades, a una empresa de tipo $\underline{c}$ le conviene que la información sea completa (le conviene desvelar la información privada)**

- Cuando la empresa informada es de tipo $\overline{c}$ y, por tanto, compite con una empresa desinformada que es más eficiente, produce una mayor cantidad con **información incompleta** que bajo **información incompleta**

- Una empresa de este tipo sale ganando, pues, con la información incompleta (ruido) y, en consecuencia, le conviene ocultar su punto débil a la empresa desinformada: que su tipo es $\overline{c}$

- Que haya información incompleta es beneficioso para una empresa informada de tipo $\overline{c}$

- La empresa desinformada gana con la II respecto a la situación en la que hubiese IC cuando la empresa informada es de tipo $\underline{c}$ y, por tanto, más eficiente que ella)

- Nuevamente, la empresa informada produce una cantidad menor en II que en IC y, en consecuencia, la empresa desinformada reacciona produciendo una cantidad mayor

- La empresa desinformada gana menos bajo II que bajo IC y la empresa informada con la que compite es de tipo $\overline{c}$ y, por tanto, menos eficiente que ella

- CS es mayor con II y la empresa informada es de tipo $\underline{c}$ (y tanto ellos como la empresa desinformada lo ignoran) que con IC y la empresa informada es de tipo $\underline{c}$
  - La cantidad total producida en II es mayor que en IC y, por tanto, el precio que pagan por la cantidad que consumen es menor
- CS es menor con II si la empresa informada es de tipo $\bar{c}$ (y tanto ellos como la empresa desinformada lo ignoran) que si fuese públicamente conocido que la empresa informada es de tipo $\bar{c}$
  - La cantidad total producida en II es menor que en IC y, en consecuencia, el precio que acaban pagando por el producto es mayor

# Competencia Bertrand

- Las empresas 1 y 2 fabrican un producto diferenciado a los ojos de los consumidores

- Compiten entre sí mediante el precio que fijan para su respectivo producto

- La función de costes de la empresa 1 puede ser $\underline{c}q_1$ o $\overline{c}q_1$, mientras que la de la empresa 2 es $cq_2$ con certeza, $0 \leq \underline{c} < c < \overline{c}$

# Competencia Bertrand

- El coste marginal (y medio) de la empresa 2 es conocido públicamente (información pública), mientras que el de la empresa 1 solo lo conoce ella (información privada)

- Lo único que la empresa 2 (jugador desinformado) sabe es la distribución de probabilidad de la que procede cada extracción del coste marginal de la empresa 1 (jugador informado): sabe que con probabilidad $\gamma$, $0 < \gamma < 1$, es $\underline{c}$ y con probabilidad $1 - \gamma$ es $\overline{c}$

- La función de demanda residual de cada empresa es

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + dp_j,\ i, j = 1,2; i \neq j$$

donde el parámetro $d$, $-1 < d < 1$, mide la diferenciación de los productos, de manera que

$d < 0$ denota que ambos son complementarios,
$d = 0$ que son independientes y
$d > 0$ que son sustitutivos

- Esta función de demanda de cada empresa es conocida públicamente

- Ahora la estrategia óptima de cada empresa es decidir, para cada uno de los tipos en los que podría encarnarse, el precio que constituya la mejor respuesta según sus creencias sobre los tipos de la empresa rival

- Un **equilibrio Bayesiano (en precios)** del juego planteado es un trío de precios

$$\{p_1(\underline{c}), p_1(\overline{c}), p_2\}$$

donde $p_1(\underline{c})$ es el precio que pone la empresa 1 de tipo $\underline{c}$ al producto que produce, $p_1(\overline{c})$ es el precio que pone la empresa 1 de tipo $\overline{c}$ al producto que produce y $p_2$ es el precio que elige la empresa 2

## Comportamiento de la empresa 1 si es $\underline{c}$

$$p_1(\underline{c}; p_2) = \frac{a + \underline{c} + dp_2}{2}$$

## Comportamiento de la empresa 1 de tipo $\overline{c}$

$$p_1(\bar{c}; p_2) = \frac{a + \bar{c} + dp_2}{2}$$

# Comportamiento de la empresa 2

$$p_2\left(c; p_1(\underline{c}), p_1(\overline{c})\right) = \frac{a + c + d\left(\gamma p_1(\underline{c}) + (1-\gamma)p_1(\overline{c})\right)}{2}$$

**Proposición.** *En un duopolio diferenciado de Bertrand con II (siendo la empresa* 1 *el jugador informado y la empresa* 2 *el no informado) el equilibrio Bayesiano en precios es*

$$\{(p_1^*(\underline{c}), p_1^*(\overline{c}), p_2^*)\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{2(2+d)a - (4 - d^2(1+\gamma))\underline{c} + d^2(1-\gamma)\overline{c} + 2dc}{2(4-d^2)}, \frac{2(2+d)a + (4 - d^2\gamma)\overline{c} + d^2\gamma\underline{c} + 2dc}{2(4-d^2)}, \frac{(2+d)a + 2c + d(\gamma\underline{c} + (1-\gamma)\overline{c})}{4-d^2}\right)\right\}$$

# Bienes sustitutivos ($d > 0$)

$$a = 1, c = \frac{1}{8}, \underline{c} = 0, \overline{c} = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2} \text{ y } d = \frac{1}{2}$$

| | $p_1$ | $p_2$ | $q_1$ | $q_2$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Información completa y empresa 1 de tipo $\underline{c}$** | $\frac{41}{60}$ | $\frac{11}{15}$ | $\frac{41}{60}$ | $\frac{73}{120}$ | $\left(\frac{41}{60}\right)^2$ | $\left(\frac{73}{120}\right)^2$ |
| **Información incompleta y empresa 1 de tipo $\underline{c}$** | $\frac{11}{16}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{11}{16}$ | $\frac{5}{8}$ | $\left(\frac{11}{16}\right)^2$ | $\left(\frac{5}{8}\right)^2$ |
| **Información completa y empresa 1 de tipo $\overline{c}$** | $\frac{49}{60}$ | $\frac{23}{30}$ | $\frac{17}{30}$ | $\frac{77}{120}$ | $\left(\frac{17}{30}\right)^2$ | $\left(\frac{77}{120}\right)^2$ |
| **Información incompleta y empresa 1 de tipo $\overline{c}$** | $\frac{13}{16}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{5}{8}$ | $\left(\frac{9}{16}\right)^2$ | $\left(\frac{5}{8}\right)^2$ |

# Bienes complementarios ($d < 0$)

$$a = 1, c = \frac{1}{8}, \underline{c} = 0, \overline{c} = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2} \text{ y } d = -\frac{1}{2}$$

| | $p_1$ | $p_2$ | $q_1$ | $q_2$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Información completa y empresa 1 de tipo $\underline{c}$** | $\frac{23}{60}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{23}{60}$ | $\frac{41}{120}$ | $\left(\frac{23}{60}\right)^2$ | $\left(\frac{41}{120}\right)^2$ |
| **Información incompleta y empresa 1 de tipo $\underline{c}$** | $\frac{31}{80}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{31}{80}$ | $\frac{13}{40}$ | $\left(\frac{31}{80}\right)^2$ | $\left(\frac{13}{40}\right)^2$ |
| **Información completa y empresa 1 de tipo $\overline{c}$** | $\frac{31}{60}$ | $\frac{13}{30}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{37}{120}$ | $\left(\frac{4}{15}\right)^2$ | $\left(\frac{37}{120}\right)^2$ |
| **Información incompleta y empresa 1 de tipo $\overline{c}$** | $\frac{41}{80}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{21}{80}$ | $\frac{13}{40}$ | $\left(\frac{21}{80}\right)^2$ | $\left(\frac{13}{40}\right)^2$ |

- **Proposición.** *Cuando las empresas* 1 *y* 2 *compiten en precios:*
- **(a)** *Si la empresa* 1 *es de tipo* $\underline{c}$, *su beneficio es mayor en II que si IC y, por tanto, su tipo fuese conocido con certeza por la empresa* 2
- **(b)** *Lo contrario sucede si la empresa* 1 *es de tipo* $\overline{c}$
- **(c)** *El beneficio de la empresa* 2 *es mayor en II y compitiendo con una empresa de tipo* $\underline{c}$ *que si IC y, por tanto, supiese con certeza que el oponente es de tipo* $\underline{c}$
- **(d)** *Lo contrario sucede si la empresa rival es de tipo* $\overline{c}$

# Subastas (véase también Antelo, M. (2014), Economía de la información, Madrid: McGraw-Hill)

- Mecanismo mediante el cual el propietario de un objeto lo adjudica entre los demandantes del mismo

- El mecanismo se define por el conjunto de reglas (previamente conocidas por todos) que determinan la forma en la que los demandantes interactúan entre sí para adquirir el objeto que se pone a la subasta

- Una alternativa a los mercados para determinar el precio de equilibrio para un objeto (normalmente, cuando el dueño no sabe el valor del mismo)

# Tipos más habituales de subastas

- **Subastas orales o de viva voz**

  - Inglesa o ascendente (venta de obras de arte o de cualquier objeto que un particular quiera vender): **Juego bayesiano dinámico**

  - Holandesa o descendente (flores cortadas, lonjas de pescado, emisión de letras y bonos del Estado en algunos países, “a cámara lenta” en tiendas de muebles usados que disminuyen el precio de objetos no vendidos un 10% cada mes): **Juego bayesiano dinámico**

- **Subastas en sobre cerrado o selladas**
  - Al primer precio (subasta para vender bienes embragados, decomisos, etc. por parte de los Juzgados, la Seguridad Social, Hacienda, etc.): **Juego bayesiano estático**
  - Al segundo precio (asignación del espectro para servicios móviles en muchos países; véase https://www.gsma.spectrum.com): **Juego bayesiano estático**

# Subasta en sobre cerrado al segundo precio

- Se subasta un determinado objeto y a ella acuden $n$ licitantes, $i = 1, \dots, n$

- Todos los licitantes son neutrales al riesgo

- La subasta es en sobre cerrado (o sellada) al segundo precio: ningún jugador observa las pujas de los oponentes (**juego bayesiano estático**)

- El ganador es el que presenta la puja más alta, teniendo que pagar el precio dado por la segunda puja más alta que se haya presentado

- Los tipos de cada jugador $i$ son sus valoraciones del objeto, $v_i$.

- El licitante $i$ conoce su valoración $v_i$, pero no las valoraciones de los demás licitantes, y supone que la valoración de cada uno de ellos es una variable aleatoria con una determinada distribución de probabilidad

- Supondremos que, para todo licitante $i$, $v_i$ es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, \overline{v}]$, siendo $v_i$ independiente de $v_j$, $i, j = 1, \dots, n; i \neq j$

- Los licitantes son simétricos (la distribución de $v_i$ es igual para todos), con lo cual sus valoraciones son variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas

- Todos los licitantes conocen los términos de la subasta

- Las acciones (o estrategias) posibles para cada uno son las pujas que puede presentar (cantidades no negativas de dinero, $b_i \geq 0$) y, por tanto, $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i = [0, +\infty)$

- Los licitantes entregan sus pujas simultáneamente

- El pago para cada licitante es la diferencia entre su valor del objeto y la cantidad que pague por él, es decir,

$$u_i(b_i, \boldsymbol{b}_{-i}, v_i, \boldsymbol{v}_{-i}) = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i}\{b_j\}, si\ b_i > \max_{j \neq i}\{b_j\} \\ 0, si\ b_i < \max_{j \neq i}\{b_j\} \end{cases}$$

- **Proposición.** *En una subasta sellada al segundo precio en la que participan $n$ licitantes neutrales al riesgo y cuyas valoraciones son variables aleatorias $v_i$ iid en el intervalo $[0, \bar{v}]$, el equilibrio Bayesiano (en estrategias dominantes) es el perfil de pujas* $\left\{\left(b_1^*(v_1), \dots, b_n^*(v_n)\right)\right\} = \{(v_1, \dots, v_n)\}$

- Decir la verdad es una estrategia dominante para cada jugador

*Demostración*

- Concentrémonos en la estrategia del jugador $i$ y definamos $\bar{b} = \max_{j \neq i} \{b_j\}$

- Si $i$ puja $b_i(v_i) = v_i$ , su pago es:

$$u_i(b_i, \boldsymbol{b}_{-i}, v_i, \boldsymbol{v}_{-i}) = \begin{cases} v_i - \bar{b}, si\ b_i > \bar{b} \text{ y, por tanto, gana la subasta} \\ 0, si\ b_i < \bar{b} \text{ y, por tanto, pierde la subasta} \end{cases}$$

- Si pujando $b_i(v_i) = v_i$, gana la subasta (porque $\bar{b} < b_i(v_i)$ y, por tanto, $\bar{b} < v_i$), en cuyo caso su pago es $v_i - \bar{b} > 0$, entonces pujando cualquier cantidad $\boldsymbol{b}_i'(\boldsymbol{v}_i) > \boldsymbol{v}_i$, sigue ganando la subasta y su pago sigue siendo el mismo que cuando pujaba $b_i(v_i) = v_i$:

$$v_i - \bar{b} > 0$$

- Imaginemos ahora que, pujando $b_i(v_i) = v_i$, pierde la subasta (porque $\overline{b} > b_i(v_i)$ y, por tanto, $\overline{b} > v_i$). En este caso, su pago es 0

- Entonces, si pujase $b_i'(v_i) > v_i$, seguiría perdiendo la subasta (si $v_i < b_i'(v_i) < \overline{b}$) y su pago seguiría siendo 0, o bien podría ganarla (si $b_i'(v_i) > \overline{b}$) pero su pago sería negativo, $v_i - \overline{b} < 0$

- La estrategia $b_i(v_i) = v_i$ domina débilmente, pues, a la estrategia $b_i'(v_i) > v_i$ (estrategia consistente en mentir hacia arriba)

- ¿Qué sucede con la estrategia $\boldsymbol{b_i'}(\boldsymbol{v_i}) < \boldsymbol{v_i}$? Hacer…

# Subasta en sobre cerrado al primer precio

- Hacer como tarea

# Provisión de un bien público

- Consideremos una comunidad formada por los individuos 1 y 2
- Tienen que decidir, simultáneamente, si contribuyen o no a financiar la adquisición de un determinado bien público
- Cada individuo puede decidir contribuir o no contribuir, $\mathcal{A}_i = S_i = \{C, N\}, i = 1, 2$
  - El bien público se suministra si uno de ellos (o los dos) eligen $C$. Si los dos individuos eligen $N$, el bien público no se suministra
- Cada individuo valora el bien público en 1 euro

# Provisión de un bien público

- Si el bien público no llega a producirse, la utilidad de cada individuo es 0

- Contribuir a financiar el bien público le supone al jugador 1 un coste de $c_1$ y al individuo 2 un coste que puede ser $\overline{c}_2$ o $\underline{c}_2$

- Cada jugador conoce sus costes

- El individuo 2 conoce el coste que le supone al individuo 1, pero este no conoce el coste para el individuo 2 (lo único que sabe es que puede ser $\overline{c}_2$ con probabilidad 2/3 o $\underline{c}_2$ con probabilidad 1/3)

Jugador 2 de tipo $\overline{c}_2$ $(2/3)$

| 1 \ 2 | $C$ | $N$ |
|---|---|---|
| $C$ | $1-\ c_1, 1-\overline{c}_2$ | $1-\ c_1, 1$ |
| $N$ | $1, 1-\overline{c}_2$ | $0, 0$ |

Jugador 2 de tipo $\underline{c}_2$ $(1/3\ )$

| 1 \ 2 | $C$ | $N$ |
|---|---|---|
| $C$ | $1-\ c_1, 1-\underline{c}_2$ | $1-\ c_1, 1$ |
| $N$ | $1, 1-\underline{c}_2$ | $0, 0$ |

- Si 1 elige $C$ con probabilidad $\gamma$ y $N$ con probabilidad $1 - \gamma$, el pago esperado para el jugador 2 de tipo $\overline{c}_2$ es

$$E\left[u_2\left(C, \gamma \middle| \overline{c}_2\right)\right] = \begin{cases} \gamma(1 - \overline{c}_2) + (1 - \gamma) \cdot 1, si\ elige\ C \\ \gamma(1 - \overline{c}_2), si\ elige\ N \end{cases}$$

- Por lo tanto, $MR_2(\gamma, \overline{c}_2) = C$

- Análogamente, $MR_2\left(\gamma, \underline{c}_2\right) = C$

- Sea $\mu$ la probabilidad de que el jugador 2 de tipo $\overline{c}_2$ elija $C$ y $\lambda$ la probabilidad de que el jugador 2 de tipo $\overline{c}_2$ elija $C$
- Entonces

$$E[u_1(C,\mu\,,\lambda)]$$
$$= \frac{2}{3}\mu(1-c_1) + \frac{1}{3}\lambda(1-c_1) + \frac{2}{3}(1-\mu)(1-c_1)$$
$$+ \frac{1}{3}(1-\lambda)(1-c_1) = 1-c_1$$

si elige C y

$$E[u_1(N,\mu\,,\lambda)] = \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\lambda$$

si elige N

- Entonces

$$MR_1(\mu\ ,\lambda) = \begin{cases} C, \text{si } c_1 < \ 1 - \dfrac{2\mu + \lambda}{3} \\ N, \text{si } c_1 \geq \ 1 - \dfrac{2\mu + \lambda}{3} \end{cases}$$

**Proposición.** En el juego Bayesiano de provisión del bien público:

*a)* *Si el coste para el individuo* 1 *de proveer el bien público es suficientemente pequeño, el EB es el par de estrategias* $\{(s_1^* =$

# Ambos individuos están desinformados

- Ahora $c_1$ y $c_2$ son extracciones de sendas variables aleatorias que se distribuyen uniformemente en el intervalo [0,1]

- La forma normal del juego es

| 1 \ 2 | $C$ | $N$ |
|---|---|---|
| $C$ | $1-c_1, 1-c_2$ | $1-c_1, 1$ |
| $N$ | $1, 1-c_2$ | $0, 0$ |

**Proposición.** *El juego de provisión del bien público:*

*a) Tiene un EB consistente en* $\{(C, C)\}$ *si, y solo si, su coste para cada individuo es inferior a ½,* $c_1 \leq \frac{1}{2}, c_2 \leq \frac{1}{2}$ *. Si el coste del bien público es superior a ½, el EB es* $\{(N, N)\}$

*b) La probabilidad de que se suministre el bien público es de solo ¾*

## *Demostración*

*a)* Dado que 2 contribuye a la provisión del bien público si $c_2 \leq \frac{1}{2}$, el pago para 1 es

$1 - c_1$ si también decide contribuir

$\Pr\left(c_2 \leq \frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{2}$ si opta por no contribuir (y pese a todo el bien se suministra gracias a la aportación de 2)

$\Rightarrow$ 1 contribuye siempre que $c_1 \leq \frac{1}{2}$. Igual con el jugador 2

*b)* Si cada jugador contribuye al bien público solo si su coste está por debajo de ½, existe una probabilidad de ¼ de que ambos jugadores tengan un coste por encima de ½

$\Rightarrow$ La probabilidad de que se suministre el bien público es de solo ¾

# Tarea

- Generalizar el modelo con el sistema de creencias $(p, 1 -$

# Los coches de segunda mano

- Un mercado con coches de alta y de baja calidad
- Cada vendedor conoce la calidad del coche que ofrece
- Los compradores solo saben que la probabilidad de que un coche elegido al azar sea de alta calidad es $\mu$, $0 < \mu < 1$
- Un comprador está dispuesto a pagar por un coche $v_a$ si es de alta calidad y $v_b$ si es de baja calidad, $v_a > v_b$
- El coste para un vendedor de ofrecer un coche es $c_a$ si es de alta calidad y $c_b$ si es de baja calidad, $c_a > c_b$

# Los coches de segunda mano

- Estos valores son de dominio público y verifican $v_a > c_a$ y $v_b > c_b$
- Comprador = jugador 1; vendedor = jugador 2
- Cada jugador tiene dos acciones posibles al precio de mercado $p$: comerciar ($C$) o no comerciar ($N$)
- $\mathcal{A}_i = \{C, N\}, i = 1, 2$
- Ambos jugadores anuncian simultáneamente su decisión
- Si ambos eligen $C$, el coche cambia de manos; si uno de ellos o los dos eligen $N$, el vendedor vuelve a casa con el coche y el comprador, de vacío

# Punto de referencia: Información simétrica

- Con **IS**, ambas partes elegirían $C$, habría intercambio y se generaría una ganancia del comercio de $v_a - c_a$ o $v_b - c_b$ a dividir entre las dos partes según el poder de negociación de cada una

- Sin embargo, la **información es asimétrica**

- ¿Qué cabe esperar que suceda en este contexto?

- Antes de nada representemos el **juego estático con información incompleta** que tiene lugar

- Su forma normal consiste en dos matrices de pagos, porque el coche de cualquier vendedor puede ser de alta calidad (vendedor de tipo $v_a$) o de baja calidad (vendedor de tipo $v_b$)

# Forma normal del juego

Vendedor de tipo $v_a$ $(\mu)$

| 2 / 1 | $C$ | $N$ |
|---|---|---|
| $C$ | $v_a - p, p - c_a$ | $0, c_a$ |
| $N$ | $0, c_a$ | $0, c_a$ |

Vendedor de tipo $v_b$ $(1-\mu)$

| 2 / 1 | $C$ | $N$ |
|---|---|---|
| $C$ | $v_b - p, p - c_b$ | $0, c_b$ |
| $N$ | $0, c_b$ | $0, c_b$ |

# Pago esperado para un vendedor (jugador 2) de tipo $v_a$

- Supongamos que el comprador (jugador 1) elige $C$ con probabilidad $\gamma$ y $N$ con probabilidad $1-\gamma$

- El pago esperado para un vendedor (jugador 2) de tipo $v_a$ es

$$E\left[u_2\left(C,\gamma\middle|v_a\right)\right] = \gamma(p-c_a) + (1-\gamma)c_a$$

si elige $C$ y

$$E\left[u_2\left(N,\gamma\middle|v_a\right)\right] = \gamma c_a + (1-\gamma)c_a = c_a$$

si elige $N$. Entonces

$$MR_2(\gamma, v_a) = \begin{cases} 1, si\ \gamma > 0\ y\ p > 2c_a \\ [0,1], si\ \gamma = 0\ o\ p = 2c_a \\ 0, si\ \gamma > 0\ y\ p < 2c_a \end{cases}$$

# Pago esperado de un vendedor (jugador 2) de tipo $v_b$

$$E\left[u_2\left(C,\gamma\middle|v_b\right)\right]=\gamma(p-c_b)+(1-\gamma)c_b$$

cuando elige $C$ y

$$E\left[u_2\left(N,\gamma\middle|v_b\right)\right]=\gamma c_b+(1-\gamma)c_b=c_b$$

cuando elige $N$. Por lo tanto,

$$MR_2(\gamma,v_b)=\begin{cases}1, si\ \gamma>0\ y\ p>2c_b\\ [0,1], si\ \gamma=0\ o\ p=2c_b\\ 0, si\ \gamma>0\ y\ p<2c_b\end{cases}$$

# El comprador (jugador 1)

- Sea $\theta_a$ la probabilidad de que un vendedor de tipo $v_a$ elija $C$ y $\theta_b$ la probabilidad de que un vendedor de tipo $v_b$ elija $C$

- El pago esperado para el comprador es

$$E[u_1(C,\theta_a,\theta_b)] = \mu\theta_a(v_a - p) + (1-\mu)\theta_b(v_b - p)$$

si elige $C$ y

$$E[u_1(N,\theta_a,\theta_b)] = 0$$

si elige $N$

- Entonces

$$MR_1(\theta_a,\theta_b) = \begin{cases} 1, si\ \mu\theta_a(v_a - p) > (1-\mu)\theta_b(p - v_b) \\ [0,1], si\ \mu\theta_a(v_a - p) = (1-\mu)\theta_b(p - v_b) \\ 0, si\ \mu\theta_a(v_a - p) < (1-\mu)\theta_b(p - v_b) \end{cases}$$

- Es decir

- $$MR_1(\theta_a, \theta_b) = \begin{cases} 1, si\ \mu > \frac{\theta_b(p - v_b)}{\theta_a(v_a - p) + \theta_b(p - v_b)} \\ [0,1], si\ \ \mu = \frac{\theta_b(p - v_b)}{\theta_a(v_a - p) + \theta_b(p - v_b)} \\ 0, si\ \ \mu < \frac{\theta_b(p - v_b)}{\theta_a(v_a - p) + \theta_b(p - v_b)} \end{cases}$$

# Equilibrio bayesiano

- Encontrar un perfil de estrategias $(\lambda, \theta_a, \theta_b)$ t.q. la estrategia del comprador sea MR a las estrategias de los dos tipos de vendedor y, al mismo tiempo, la estrategia de cada tipo de vendedor sea MR a la estrategia del comprador

- Empecemos calculando un **equilibrio bayesiano de tipo agrupador (EBA)** en el que tanto los coches de alta calidad como los de baja calidad se comercian con probabilidad 1

- Un **EBA** requiere que $p \geq c_a$ y, dada esta condición, el comprador elige $C$ si, y solo si, en su MR se cumple

$$\mu(v_a - p) > (1-\mu)(p - v_b)$$

es decir

$$\mu v_a + (1-\mu)v_b > p \geq c_a$$

con lo cual es necesario que $\mu v_a + (1-\mu)v_b \geq c_a$ o, lo que es lo mismo

$$\mu \geq \frac{c_a - v_b}{v_a - v_b}$$

- **Proposición.** *Si* $\mu \geq \frac{c_a - v_b}{v_a - v_b}$*, existe un precio* $p \in [c_a,\ \mu v_a +$

- Busquemos ahora un **equilibrio bayesiano de tipo separador (EBS)** en el que se intercambien los coches de alta calidad, pero no los de baja calidad

- Para que esto suceda, ha de verificarse que

$$MR_2(\gamma, v_a) = 1 \text{ y } MR_2(\gamma, v_b) = 0$$

es decir,

$$\gamma > 0 \text{ y } 2c_a < p < 2c_b$$

lo cual es imposible

- No existe, pues, un **EBS** de este tipo

## ¿Y un **EBS** en el que se intercambien los coches de baja calidad, pero no los de alta calidad?

- Para ello tendría que suceder que

$$MR_2(\gamma, v_a) = 0 \text{ y } MR_2(\gamma, v_b) = 1$$

es decir,

$$\gamma > 0 \text{ y } 2c_b < p < 2c_a$$

- Observando la matriz de la derecha, el comprador estaría dispuesto a comprar con probabilidad positiva si, y solo si,

$$(1-\mu)(v_b - p) \geq 0$$

lo cual exige que $p \leq v_b$

- **Proposición.** *Para todo* $\mu$ *y para todo* $p \in [0, v_b]$ *existe un EBS en el que los coches de baja calidad se intercambian, pero no los de alta calidad*

- IDEA: Si la valoración de los coches (el precio) es muy reducida, los vendedores solo pondrán a la venta coches de baja calidad

- A su vez, los compradores, conscientes de ello, no estarán dispuestos a pagar por los coches que salen a la venta ningún precio que esté por encima de $v_b$

- En definitiva, la demanda es reducida y ello desincentiva a los vendedores a sacar coches de alta calidad al mercado, lo cual refuerza la débil demanda existente

- No existe, pues, un EBS en el que los coches de alta calidad se intercambien y los de baja calidad no

- En el EBS que surge solo se intercambian coches de baja calidad, mientras que en el EBA ambos tipos de coches son vendidos, siempre y cuando la proporción de coches de alta calidad sea tal que $\mu \geq \frac{c_a - v_b}{v_a - v_b}$

- Por el contrario, si la proporción de coches de alta calidad es tal que $\mu < \frac{c_a - v_b}{v_a - v_b}$, el EBA desaparece y solo se intercambian coches de baja calidad en el único EBS que existe

- MENSAJE: La información asimétrica hace que los mercados fallen como mecanismo de asignación eficiente de los recursos

# ¿Hay remedio?

- La posibilidad de utilizar una garantía por parte de los vendedores como señal de calidad convierte este **juego estático** en un **juego dinámico** (de señalización) y permite que haya un EBS en el que ambas calidades se intercambian a precios distintos, al igual que sucede en información completa, es decir, los coches de alta calidad a un precio elevado y los de baja calidad a un precio reducido

- El mercado vuelve a funcionar, pues, como si la información fuese completa, si bien a costa de que los vendedores de tipo $v_a$ (y solo los vendedores de tipo $v_a$) envíen una señal costosa de que sus coches son de alta calidad