Capítulo 6

Juegos bayesianos dinámicos

En un **JB dinámico** hay al menos un jugador que, antes de mover, observa qué ha jugado algún otro jugador

Consecuencias:

Si el primer jugador en jugar es el **jugador informado**, y dado que las acciones que tome pueden servir para revelar u ocultar dicha información, la transmisión de información (veraz o no) se convierte en parte esencial de la conducta estratégica

En particular, cuando revelar su tipo beneficia a sus intereses, entonces querrá transmitir —mediante señales observables y creíbles— información honesta sobre dicho tipo; por el contrario, cuando revelarlo le perjudique (cosa que ocurrirá cuando su tipo es malo), querrá emular el comportamiento de un tipo más favorable para sus intereses

- El jugador o jugadores no informados, a partir de las acciones que observan del jugador o jugadores informados, aprenden algo (o no) sobre el juego que se está jugando y, una vez que han aprendido algo (o no), toman sus propias decisiones

- ¿Cómo se incorpora este aprendizaje? Una vez que observa la señal enviada por el jugador informado, el jugador no informado revisa, mediante actualización bayesiana, el sistema de creencias *a priori* sobre el tipo t de jugador con el que están interaccionando.

- Así, de las creencias *a priori*, $\mathrm{Pr}(t)$, se pasa a las creencias *a posteriori* o creencias revisadas, es decir, a la distribución de probabilidad sobre el conjunto de tipos del jugador informado tras observar la señal que ha enviado, $\mathrm{Pr}(t|\text{señal o acción observada})$

- Este proceso de transmisión de información en un juego bayesiano dinámico es lo que, en los juegos en los que hay solo dos jugadores (un emisor y un receptor), se conoce como **señalización**

- Cuando el primer jugador que mueve es el **jugador no informado**, puede estar interesado en sonsacar información sobre el tipo del jugador informado, eligiendo *menús con varias opciones* en lugar de optar por una sola acción

- Lo que pretende con el menú de acciones es que el jugador informado responda a la acción que, de entre todas, convenga más a su tipo y no a la acción que sea más adecuada para otro tipo distinto del que realmente es

- Este proceso de obtención de información se conoce como **filtración o autoselección**

- En cualquiera de las dos situaciones mencionadas la *transformación* de Harsany permite obtener un juego con información imperfecta

- En el caso de los **juegos bayesianos estáticos**, haciendo que el jugador desinformado tenga expectativas de que el jugador informado sea de un tipo u otro, para lo cual asigna probabilidades a cada uno de los tipos de jugador informado

- La novedad, ahora, en el caso de los **juegos bayesianos dinámicos**, es la transmisión de información entre los jugadores y la necesidad de incorporar la racionalidad secuencial

- Por esa razón, es imprescindible contar con una herramienta que, a lo largo del juego, refleje las probabilidades que cada jugador atribuye a los distintos tipos de los rivales — el sistema de creencias

- El desarrollo de la interacción entre los jugadores tiene, pues, dos elementos de igual relevancia, las **estrategias** y las **creencias**

- De esta forma, el concepto de solución apropiado para un juego dinámico con información incompleta es el de **equilibrio de Nash bayesiano perfecto**, o **equilibrio bayesiano perfecto** sin más (Selten, 1975), que combina estrategias de los jugadores y creencias del jugador no informado

- Para ello, es necesario hacer supuestos bajo los cuales los jugadores establecen creencias sobre el nodo por el que va a pasar el juego y que esas creencias, y las mejores respuestas de acuerdo a ellas, sean luego consistentes

Hasta ahora hemos visto:

- El equilibrio de Nash (EN) para juegos estáticos de información completa
- El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) para juegos dinámicos de información completa
- El equilibrio bayesiano (EB) para juegos bayesianos estáticos

- El ENPS es, sin embargo, inoperante en juegos bayesianos dinámicos porque estos carecen de subjuegos propios (subjuegos distintos del juego completo)

- La forma de superar esta inoperancia es ampliar el concepto de perfección en los subjuegos para requerir que los jugadores, mediante la regla de Bayes, actualicen racionalmente sus creencias respecto al juego que se está jugando

- Así se llega al **equilibrio bayesiano perfecto** (EBP) como el concepto adecuado para juegos bayesianos dinámicos. De la misma forma que el ENPS elimina cualquier EN que esté sustentado en amenazas increíbles, el EBP puede ser visto como un refinamiento del EB

- El EBP exige que en cada contingencia posible del juego

  - las estrategias de cada jugador sean mejores respuestas, dadas sus creencias o conjeturas en cada nodo dentro de su conjunto de información, y

  - que dichas creencias sean consistentes con las estrategias óptimas de los jugadores y la distribución de probabilidad con la que elige la *Naturaleza*, utilizando la regla de Bayes siempre que ello sea posible

- A partir de aquí, un JBD puede tener múltiples EBP porque estemos en nodos de probabilidad cero y, en consecuencia, las creencias *a priori* no puedan actualizarse con la regla de Bayes.

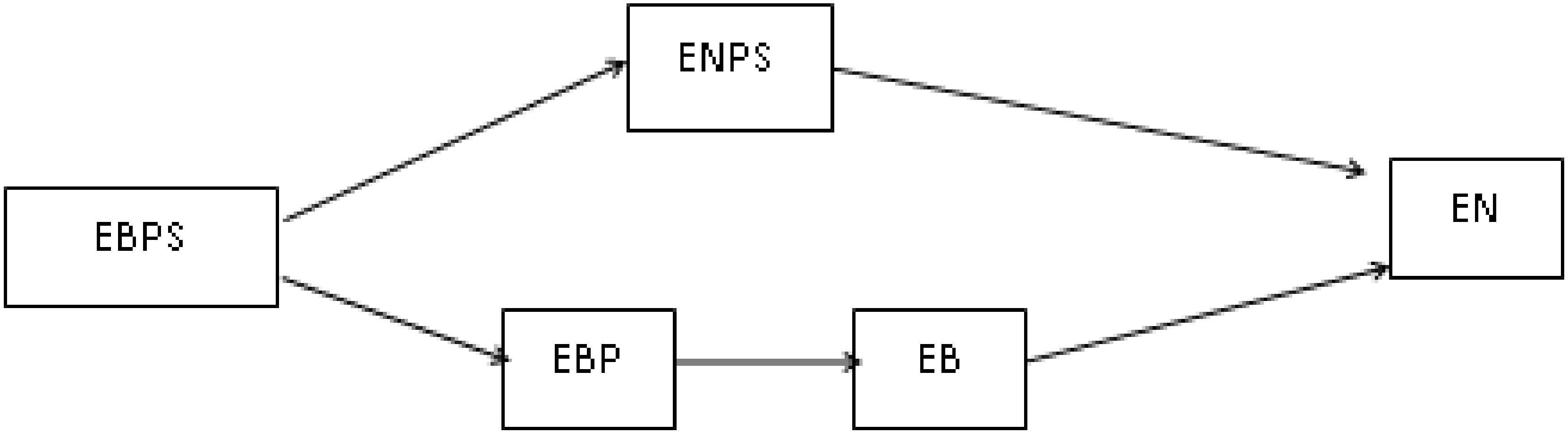
- En ese caso, el EBP no impone ninguna restricción a las creencias, razón por la cual estas son arbitrarias y podemos elegir cualquier valor para ellas.

- Pues bien, la literatura se ha ocupado de imponer restricciones a las creencias cuando la regla de Bayes es inaplicable (creencias fuera de la trayectoria del equilibrio), refinando el concepto de EBP

- Los refinamientos basados en la noción de dominación y el criterio intuitivo (Cho y Kreps, 1987), así como el concepto de divinidad (Banks y Sobel, 1987) se utilizan precisamente para restringir las creencias de fuera del equilibrio

- El EBP refina el concepto de EB con la idea de la racionalidad secuencial. Sin embargo, no refina el concepto de ENPS.

- Para conseguirlo, Fudenberg y Tirole (1991) proponen un concepto de equilibrio aún más estricto, el equilibrio bayesiano perfecto en subjuegos (EBPS), que refina todos los conceptos anteriores



- En el EBPS los jugadores establecen creencias y restricciones sobre todos los conjuntos de información por los que puede pasar el juego

- El EBP solo impone restricciones sobre los conjuntos de información (y sus nodos) situados en la trayectoria de equilibrio

- $\Rightarrow$ El EBPS es más restrictivo que el EBP, ya que impone restricciones sobre todas las posibles trayectorias (tanto del equilibrio como de fuera del equilibrio) y no solo sobre los nodos por los que pasa la trayectoria de equilibrio

- En este capítulo centraremos la atención en el EBP

Regla de Bayes

- La regla de Bayes permite calcular la probabilidad de que un determinado suceso ocurra, dado que ya ha ocurrido otro y, por tanto, ambos eventos no son independientes

- **Definición** (Regla de Bayes). *La probabilidad condicionada de que ocurra el suceso B, dado que ha ocurrido A, es la probabilidad de que se den tanto A como B dividida por la probabilidad a priori de que ocurra A*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A|B) \times \Pr(B)}{\Pr(A)}$$

Un ejemplo

- Un grupo de estudiantes que se presentan a un examen
- Una pregunta con n opciones, de las cuales solo una es correcta
- Cada estudiante elige la respuesta al azar (porque no ha estudiado y no domina la asignatura) o bien a sabiendas (porque ha preparado la asignatura)
- La proporción de estudiantes que dominan la asignatura es γ, $0 < \gamma < 1$. Este es el sistema de creencias *a priori*
- Queremos *actualizar* o *revisar* estas creencias tras haber observado algún evento o señal (en el presente caso, que en el examen se haya acertado con la respuesta correcta)

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno, habiendo acertado, no domine (o domine) la asignatura? La probabilidad a priori es $1-\gamma$, pero ¿y la probabilidad a posteriori?

$$\Pr(no\ sabe|correcta) = \frac{\Pr(correcta|no\ sabe)\Pr(no\ sabe)}{\Pr(correcta)} \qquad (1)$$

- Pues bien

$$\Pr(correcta|no\ sabe) = \frac{1}{n}$$

con lo cual

$$\Pr(correcta|no\ sabe)\Pr(no\ sabe) = \frac{1}{n}(1-\gamma)$$

- Denotando $\frac{1}{\Pr(correcta)} = x$, (1) se puede reescribir como

$$\Pr(no\ sabe|correcta) = \frac{1}{n}(1-\gamma)x \qquad (2)$$

- Por un razonamiento análogo:

$$\Pr(sabe|correcta) = \gamma x$$

ya que

$$\Pr(correcta|sabe) = 1 \text{ y } \Pr(sabe) = \gamma$$

Ahora bien

$$\Pr(no\ sabe|correcta) + \Pr(sabe|correcta) = 1$$

con lo cual

$$\frac{1}{n}(1-\gamma)x + \gamma x = 1$$

de donde

$$x = \frac{n}{1-\gamma+n\gamma}$$

con lo cual (2) equivale a

$$\Pr(no\ sabe|correcta) = \frac{1}{n}(1-\gamma)x = \frac{1-\gamma}{1-\gamma+n\gamma}$$

En particular:

- Hacen el examen 100 los alumnos, de los cuales 10 dominan perfectamente la asignatura

- La probabilidad *a priori* de que alguien elegido al azar no domine la asignatura es, pues, $1 - \gamma = 0{,}9$

- Si hay 4 alternativas para elegir, de las cuales solo una es correcta, la probabilidad *a posteriori* de que alguien, habiendo elegido la respuesta correcta lo haya hecho de chiripa y, por tanto, no domina la materia, es $\Pr(no\ sabe | correcta) = \frac{0{,}9}{0{,}9+0{,}04} = 0{,}6923$

Motivación del EBP

- Consideremos el siguiente juego de entrada entre las empresas 1 y 2

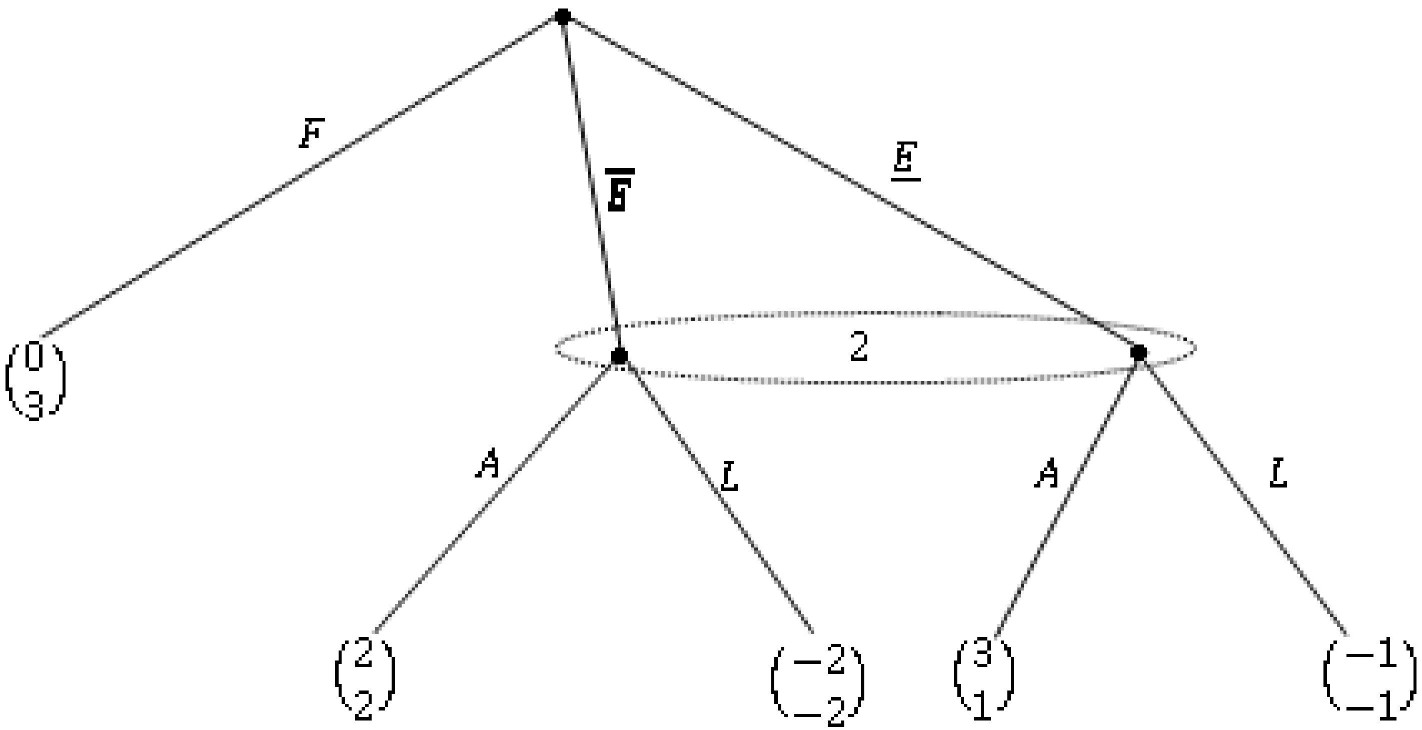
- La empresa 1 está sopesando entrar en el mercado operado por la empresa 2. Puede decidir permanecer fuera del mercado, F, o entrar

- Si entra, puede hacerlo a gran escala, $\overline{E}$, o a pequeña escala, $\underline{E}$, $\overline{E} > \underline{E}$: $\mathcal{A}_1 = \{F, \overline{E}, \underline{E}\}$

- La empresa 2, que desconoce con qué tamaño entra la empresa 1, puede acomodar la entrada, A, o luchar contra ella, L. El conjunto de acciones de esta empresa es, pues, $\mathcal{A}_2 = \{A, L\}$

- Ambas empresas juegan simultáneamente

En forma extensiva:



- Teniendo en cuenta que la empresa 1 posee un conjunto de información con un solo nodo de decisión y tres acciones posibles, mientras que la empresa 2 tiene un conjunto de información con dos nodos, los respectivos conjuntos de estrategias son $\mathcal{S}_1 = \{F, \overline{E}, \underline{E}\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{A, L\}$

- A partir de aquí, la forma normal del juego es

1 \ 2	A	L
F	$0, 3$	$0, 3$
$\overline{E}$	$2, 2$	$-2, -2$
$\underline{E}$	$3, 1$	$-1, -1$

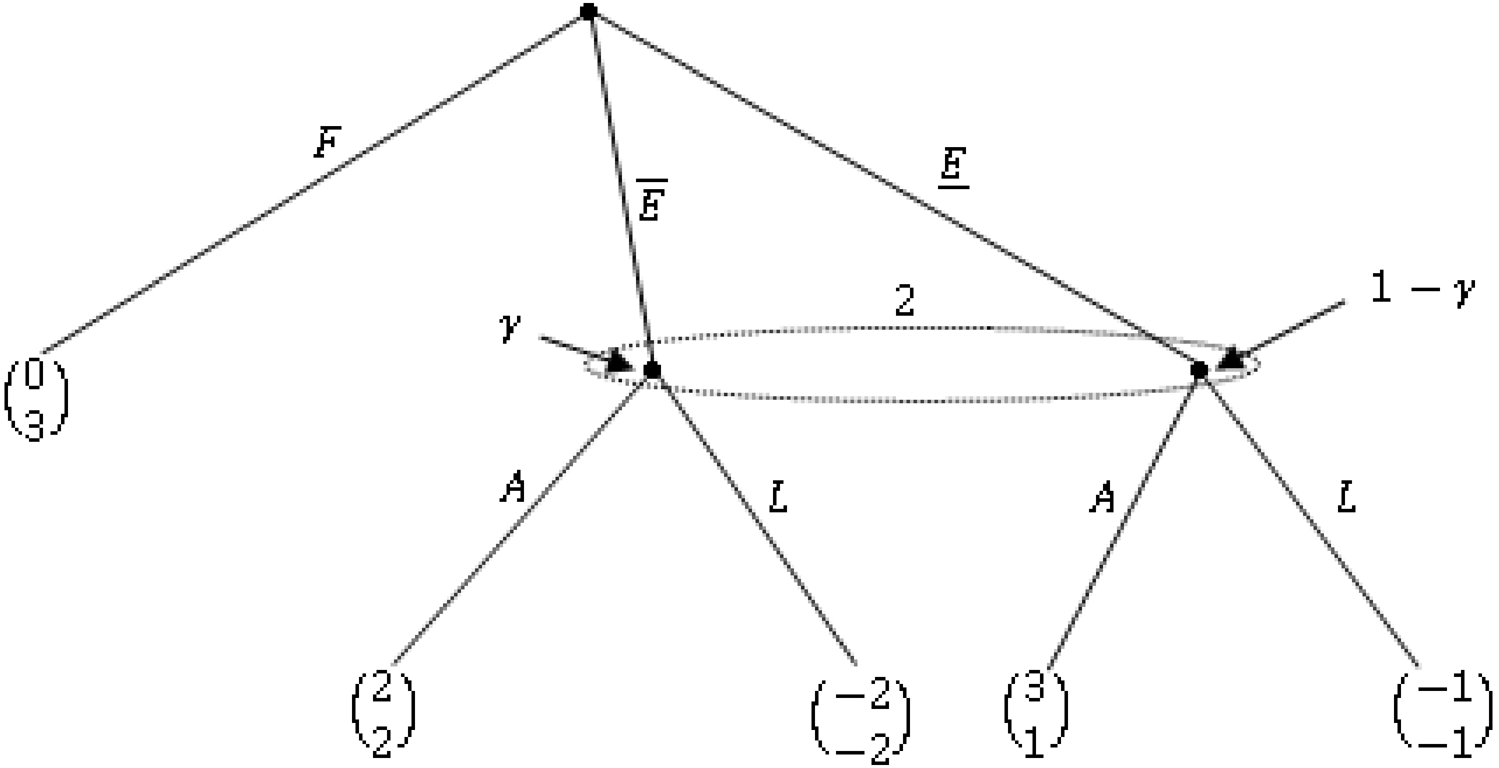
- **Proposición.** *El juego tiene dos EN en estrategias puras,* $\{(\underline{E}, A), (F, L)\}$
- ¿Podemos refinar estos EN aplicando el criterio de perfección en los subjuegos?
- No. Porque el juego carece de subjuegos propios (subjuegos distintos del juego en su totalidad)
- El único subjuego que existe es el juego entero y, dado que un ENPS es, por definición, un EN en cada subjuego, de ahí que los dos EN sean también ENPS
- Sin embargo, el equilibrio (F, L) conlleva una amenaza increíble del jugador 2. Este nunca jugará L porque es una estrategia dominada por A
- Pues bien, para poder descartar (F, L) como equilibrio razonable para jugadores que consideramos racionales necesitamos refinar el concepto de equilibrio yendo más del ENPS

- La **perfección en los subjuegos** no solo es inservible como criterio de refinamiento en juegos de información completa cuyo único subjuego es el juego total como el del Ejemplo 1
- También lo es en los juegos bayesianos dinámicos.
  - El requerimiento del ENPS es que las estrategias sean respuestas óptimas en cada subjuego
  - Ahora bien, si la información es imperfecta, el ENPS puede admitir soluciones que no prescriben jugadas óptimas en conjuntos de información que tengan más de un nodo
- Estamos obligados, pues, en ambos casos a utilizar otro concepto de equilibrio más operativo que el de perfección en los subjuegos. Ese concepto es el llamado EBP (Selten, 1975)

- **Definición:** Un **EBP** es un conjunto de percepciones (formadas por estrategias y conjeturas para cada jugador) que conllevan tres requerimientos relacionados con las **creencias**, la **racionalidad secuencial** y la **consistencia de las creencias con las estrategias de equilibrio**. Examinemos el significado de cada uno de ellos

- **Requerimiento R1 (Creencias).** En cada conjunto de información, el jugador que debe decidir ha de tener una conjetura sobre el nodo del conjunto de información al que se ha llegado en el desarrollo del juego
  - Si el conjunto de información tiene varios nodos, una creencia es una distribución de probabilidad sobre dichos nodos; si tiene uno solo, debe asignarse probabilidad 1 a dicho nodo

- Consideremos nuevamente el juego del Ejemplo 1 que tiene dos conjuntos de información: uno en el que decide el jugador 1 y otro donde decide el jugador 2.
- El conjunto de información en el que decide el jugador 1 tiene un solo nodo, con lo cual la única distribución de probabilidad posible es atribuir probabilidad 1 a dicho nodo.
- Sin embargo, el conjunto de información donde mueve el jugador 2 tiene dos nodos de decisión y una distribución de probabilidad sería, por ejemplo, asignar probabilidad γ, $0 < \gamma < 1$, a que el juego está en el nodo izquierdo y probabilidad $1 - \gamma$ a que está en el nodo derecho.
- Esto es lo que aparece representado en la Figura 6.3


F
$\overline{E}$
$\underline{E}$
2
γ
$1-\gamma$
A
L
A
L
$\binom{0}{3}$
$\binom{2}{2}$
$\binom{-2}{-2}$
$\binom{3}{1}$
$\binom{-1}{-1}$

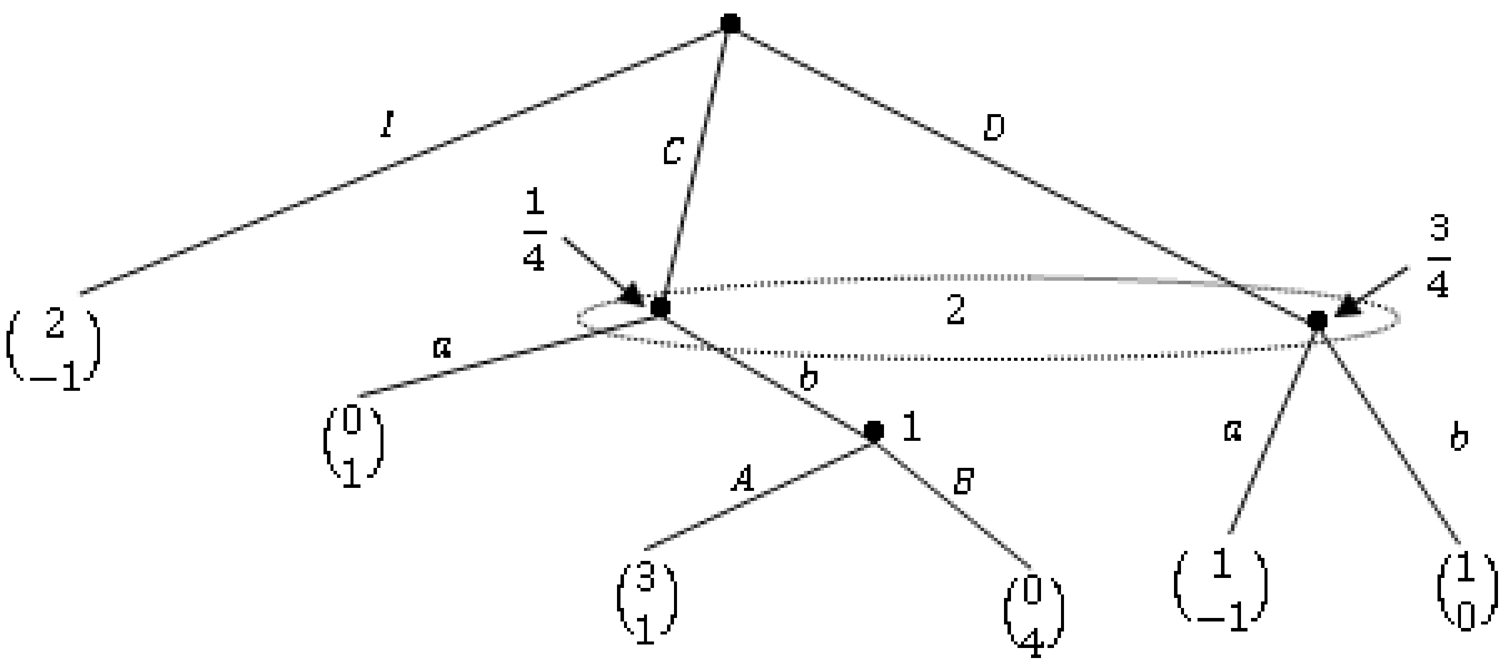
- En este caso, el requerimiento R1 se representa por las probabilidades γ y $1-\gamma$
- **Requerimiento R2 (Racionalidad secuencial o sucesiva).** La acción de un jugador en un momento dado y sus acciones posteriores deben ser óptimas, dadas las creencias en cada nodo dentro de cada conjunto de información y las acciones posteriores de los otros jugadores
- Para ello se supone que los jugadores forman creencias sobre todos los nodos de cada conjunto de información (requisito R1).
- Este requisito R2 consigue consistencia y elimina las conjeturas disparatadas

- En el juego del Ejemplo, el pago esperado para el jugador 2 es

$$E[u_2] = \begin{cases} 2\gamma + 3(1-\gamma) = 3 - \gamma, \text{si juega } A \\ -2\gamma - 1(1-\gamma) = -(1+\gamma), \text{si juega } L \end{cases}$$

- $\Rightarrow$ R2 impide al jugador 2 jugar la estrategia L, ya que $E[\pi_2(L)] < E[\pi_2(A)], \forall\gamma \in [0,1]$

- Exigir que cada jugador tenga una *creencia* (R1) y *actúe óptimamente* dada su creencia (R2) es, pues, suficiente para eliminar el equilibrio de Nash (F, L), ya que el jugador 2 nunca jugará L y, por tanto, el jugador 1 no estará interesado en jugar F
- Queda, pues, $(\underline{E}, A)$ como único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Si en el equilibrio el jugador 1 juega $\underline{E}$, el jugador 2 debería incorporar esta información en su sistema de creencias y revisarlo asumiendo que $\gamma = 1$
- Por lo tanto, en el ENPS $(\underline{E}, A)$ la creencia del jugador 2 debe ser $\gamma = 1$


I
C
D
1/4
3/4
2
a
b
1
A
B
a
b
(2, −1)
(0, 1)
(3, 1)
(0, 4)
(1, −1)
(1, 0)

- En este juego los espacios de estrategias de los jugadores 1 y 2 son $\mathcal{S}_1 = \{IA, IB, CA, CB, DA, DB\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{a, b\}$
- Supongamos que el jugador 2 asigna probabilidad $\frac{1}{4}$ a que el jugador 1 juegue C la primera vez que juega y, por tanto, a que el juego esté situado en el nodo izquierdo de su conjunto de información, y probabilidad $\frac{3}{4}$ a que el jugador 1 juegue D la primera vez que juega y, por tanto, a que el juego esté en el nodo izquierdo de su conjunto de información
- Este es el sistema de creencias *a priori*
- La racionalidad secuencial requiere que la estrategia del jugador 2 sea óptima, dado el subsiguiente comportamiento especificado por la estrategia del jugador 1

- Como su pago esperado es

$$E[u_2] = \begin{cases} \frac{1}{4}1 + \frac{3}{4}(-1) = -\frac{1}{2}, \text{si juega } a \\ \frac{1}{4}1 + \frac{3}{4}0 = \frac{1}{4}, \text{si juega } b \end{cases}$$

este jugador debe jugar b

- Una estrategia para un jugador es un plan de acción completo que describe qué elegirá en cada nodo de decisión en el que le pueda tocar jugar. Describe, pues, una acción en cada uno de los nodos de decisión del jugador

- La racionalidad secuencial también requiere que la estrategia del jugador 1 sea óptima en sus dos conjuntos de información, dada la estrategia del jugador 2
- En el último conjunto de información del jugador 1 —el que se alcanza tras el desarrollo Cb del juego (1 ha jugado C y 2 ha jugado b)—, la acción óptima para el jugador 1 es A
- En el primer conjunto de información del jugador 1 (el que inicia el juego), la acción óptima para el jugador 1, dada la estrategia óptima b para el jugador 2, es I
- Las dos estrategias óptimas para el jugador 1 son, pues, IA y CA, dada la estrategia b del jugador 2

- **Requerimiento R3 (Consistencia de las creencias con las estrategias de equilibrio).** La creencia de cada jugador ha de ser consistente con el perfil de estrategias óptimas o de equilibrio
- Para que sea consistente con las estrategias óptimas, *ex-post*, ha de derivarse de estas mediante la regla de Bayes
- En conjuntos de información situados en la trayectoria del equilibrio, las creencias han de ser consistentes (en el sentido de la regla de Bayes) con las estrategias de equilibrio de los jugadores
- En conjuntos de información situados fuera de la trayectoria del equilibrio, han de formarse mediante actualización bayesiana siempre que sea posible

- Sin embargo, tras acciones que no son utilizadas en la estrategia de la trayectoria de equilibrio del jugador informado, podemos poner cualquier creencia (aunque obviamente deberá satisfacer el requerimiento R2)

- Un conjunto de información está en la trayectoria de equilibrio si se alcanza con probabilidad positiva cuando el juego se desarrolla de acuerdo con las estrategias de equilibrio

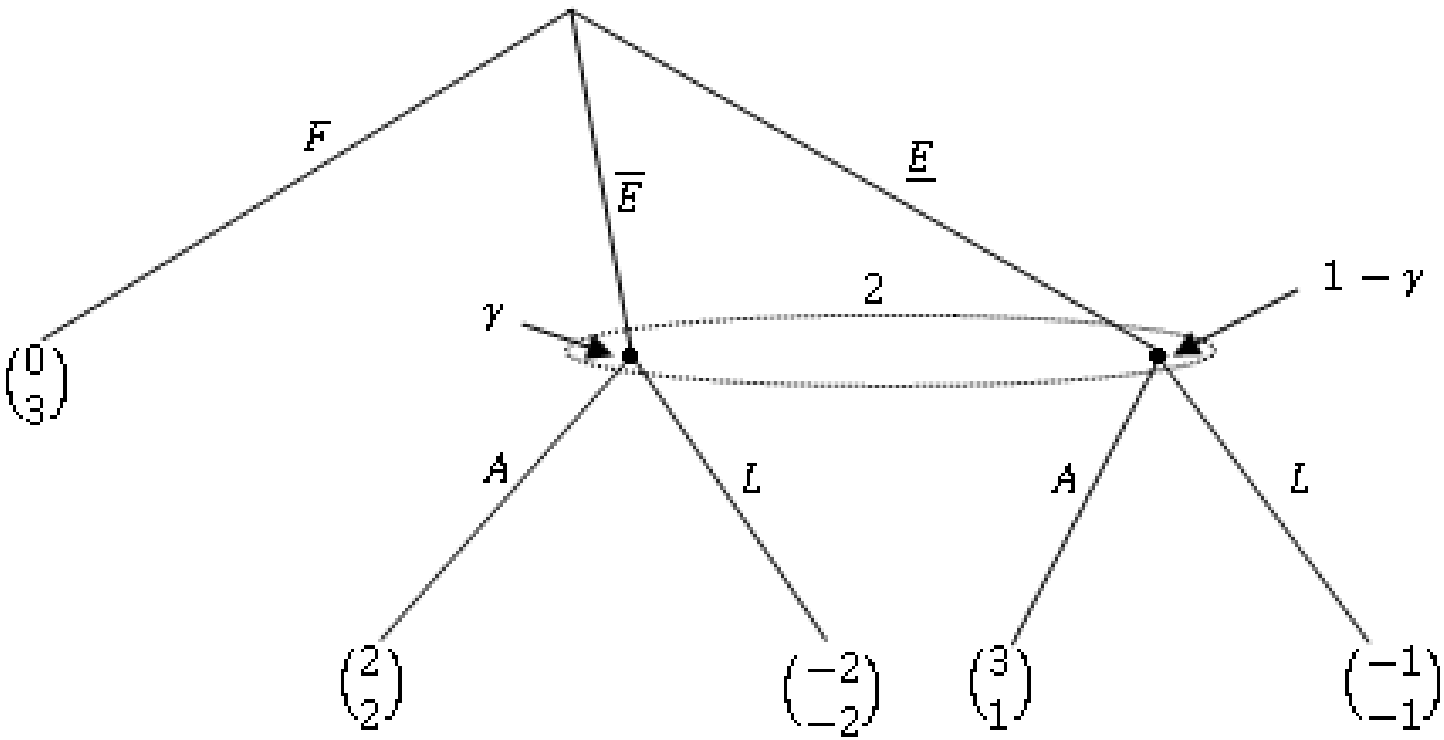
EBP

- *Un EBP es una combinación de estrategias (una para cada jugador), $\boldsymbol{s}^*$, y un sistema de creencias, γ, tales que*

$$E_{\boldsymbol{t}_{-i},\gamma}[u_i(s_i^*(t_i), \boldsymbol{s}^*_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})|\gamma, \mathcal{V})] \geq E_{\boldsymbol{t}_{-i},\gamma}[u_i(s_i(t_i), \boldsymbol{s}^*_{-i}(\boldsymbol{t}_{-i})|\gamma, \mathcal{V})]$$

para toda estrategia $s_i \in \mathcal{S}_i$ y todo $t_i \in \mathcal{T}_i$, y para todo conjunto de información $\mathcal{V}$ siempre y cuando γ se calcule mediante actualización bayesiana

Alternativamente: Un EBP es un conjunto de estrategias y creencias que satisfacen los requerimientos R1-R3



F
$\overline{E}$
$\underline{E}$
2
γ
$1-\gamma$
A
L
A
L
$\binom{0}{3}$
$\binom{2}{2}$
$\binom{-2}{-2}$
$\binom{3}{1}$
$\binom{-1}{-1}$

- *El único EBP es* $\left\{\left(\underline{E}, A\right);\ \gamma = 0\right\}$
- *Demostración* El pago esperado para el jugador 2 es

$$E[u_2] = \begin{cases} 2\gamma + 1(1-\gamma) = 1 + \gamma, \text{si juega } A \\ -2\gamma - 1(1-\gamma) = -(1+\gamma), \text{si juega } L \end{cases}$$

y, en consecuencia, su estrategia óptima es elegir A. Teniendo esto en cuenta, el pago esperado para el jugador 1 es

$$E[u_1] = \begin{cases} 0, \text{si juega } F \\ 2, \text{si juega } \overline{E} \\ 3, \text{si juega } \underline{E} \end{cases}$$

- $\Rightarrow$ elegirá $\underline{E}$. Entonces la creencia del jugador 2 de que el juego se encuentra en el nodo derecho de su conjunto de información se determina, por actualización bayesiana, como $\gamma = \frac{0}{1} = 0$, con lo cual un EBP sería $(\underline{E}, A)$ con el sistema de creencias que asigna probabilidad $\gamma = 0$

- Sin embargo, el ENPS (F, L) no es un EBP. El conjunto de información del jugador 2 nunca se alcanza (en la senda del equilibrio) y, por tanto, podemos asignar cualquier probabilidad arbitraria a los nodos de dicho conjunto de información

- Ahora bien, para cualquier probabilidad que elijamos, la mejor respuesta del jugador 2 es A, con lo cual la mejor respuesta del jugador 1 a la estrategia del jugador 2 es jugar $\overline{E}$ y no F

Juegos de señalización

- Son los juegos bayesianos dinámicos más simples
- Solo hay dos jugadores: uno es el jugador informado y el otro, el desinformado
- El jugador informado puede tener varios tipos y solo él conoce su tipo exacto, con lo cual posee información privada
- El jugador desinformado no tiene tipos, por lo que su función de pagos es conocida por todos
- Estamos, pues, ante una situación de asimetría informacional en la que un jugador sabe algo que el otro no sabe
- Ambos jugadores toman decisiones de forma secuencial. Primero, decide el jugador informado, adoptando una decisión (señal). El jugador desinformado observa esta señal y, a continuación, adopta una acción

Timing

- El azar o *Naturaleza* elige un tipo t^j para el emisor de su conjunto factible de tipos $\mathcal{T} = \{t^1,, \dots, t^k\}$ de acuerdo con una distribución de probabilidad que es conocida por los dos jugadores
- El emisor observa la realización de su tipo y elige un mensaje o señal m^j del conjunto de mensajes o señales factible $\mathcal{M} = \{m^1, \dots, t^k\}$ para enviar al receptor
- El receptor observa el mensaje del emisor, m^j, pero no su tipo t^j. A partir del mensaje que recibe, elige una acción a^j de su conjunto de acciones factible $\mathcal{A} = \{a^1, \dots, a^k\}$
- Los pagos esperados del emisor y del receptor son $E\left[u_E\left(t^j, m^j, a^j\right)\right]$ y $E\left[u_R\left(t^j, m^j, a^j\right)\right]$, respectivamente

- **Requisito S1.** El receptor, después de observar el mensaje m^j del emisor, debe formarse una conjetura sobre los tipos que pueden haber enviado ese mensaje. Esta conjetura se particulariza en una distribución de probabilidad, $\Pr(t^j|m^j)$
- **Requisito S2.** Para cada mensaje enviado, la acción del receptor debe maximizar su utilidad esperada, dadas sus conjeturas sobre qué tipos del emisor podrían haber enviado el mensaje, es decir,

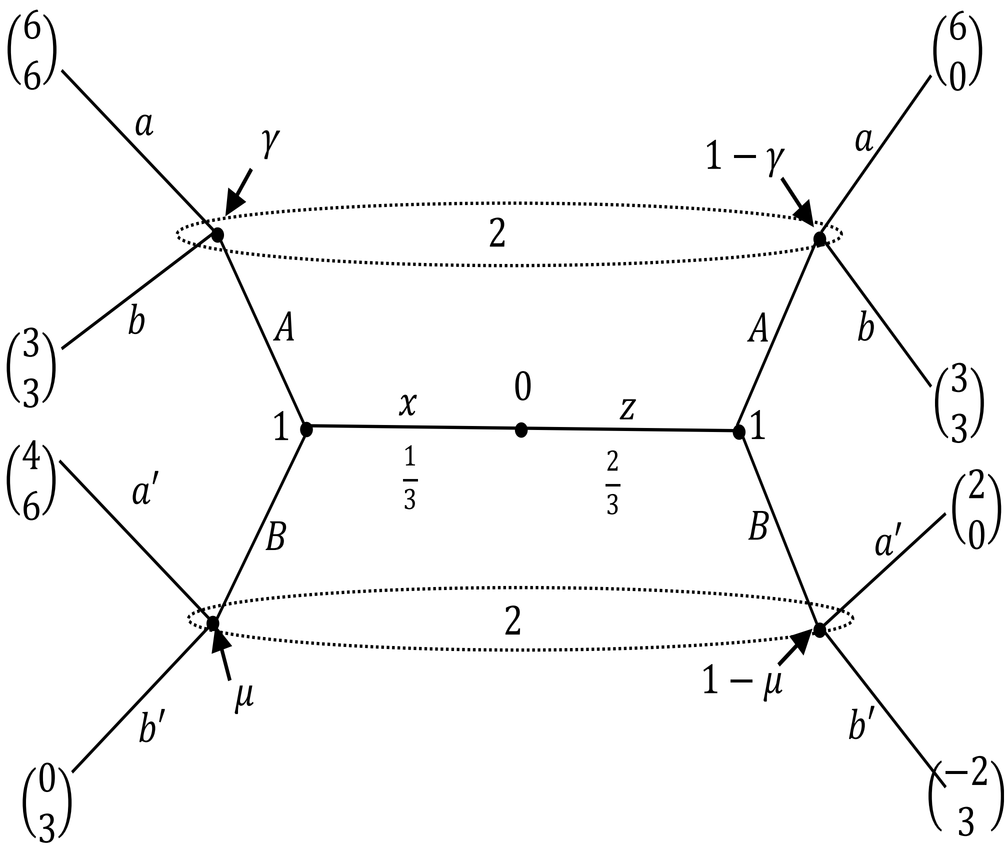
$$a^*(m^j) = \arg\max \sum_{j=1}^{k} \Pr(t^j|m^j) \cdot u_R(t^j, m^j, a^j)$$

- La acción del emisor debe ser óptima, dada la estrategia del receptor:

$$m^*(t^j) = \arg\max u_R\left(t^j, m^j, a^*(m^j)\right)$$

- **Requisito S3.** Para cada mensaje m^j en el conjunto de mensajes $\mathcal{M}$, si existe t^j en $\mathcal{T}$ tal que $m^*(t^j) = m^j$, la conjetura del receptor en el conjunto de información correspondiente a m^j debe derivarse de la regla de Bayes, $\Pr(t^j|m^j) = \frac{\Pr(t^j)}{\sum \Pr(t^j)}$, y la estrategia del emisor

- *Un EBP en estrategias puras de un juego de señalización es un par de estrategias,* $m^*(t^j)$ *y* $a^*(m^j)$*, y una conjetura,* $\Pr(t^j|m^j)$*, que satisfagan los requisitos de señalización* $S1$-$S3$*.*



$\binom{6}{6}$
a
γ
$1-\gamma$
a
$\binom{6}{0}$
2
b
A
A
b
$\binom{3}{3}$
$\binom{3}{3}$
x
0
z
1
1
$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$
$\binom{4}{6}$
a'
B
B
a'
$\binom{2}{0}$
2
μ
$1-\mu$
b'
b'
$\binom{0}{3}$
$\binom{-2}{3}$

- Sea γ la probabilidad que asigna el jugador 2 a que el juego está en el nodo izquierdo de su conjunto de información superior, es decir, a que el jugador 1 es de tipo x, y $1 - \gamma$ la probabilidad de que esté en el nodo derecho, es decir, de que el jugador 1 sea de tipo z.
- Por otra parte, el jugador 2, si observa que el jugador 1 ha enviado la señal B, puede elegir entre a' y b', pero no sabe de qué tipo es el jugador 1.
- Sea μ la probabilidad que el jugador 2 asigna a que el juego esté en el nodo izquierdo de su conjunto de información inferior, es decir, a que el jugador 1 sea de tipo x, y $1 - \mu$ la probabilidad de que esté en el nodo derecho, es decir, a que el jugador 1 sea de tipo z.

- *Este juego tiene dos EBP:* (BA, ba') *y* $(AA, b'b)$*.*

- *Demostración* Imaginemos que el jugador 2 observa que el jugador ha emitido la señal A. Entonces su pago esperado es

$$E[u_2] = \begin{cases} 6\gamma + 0(1-\gamma) = 6\gamma, \text{si juega } a \\ 3\gamma + 3(1-\gamma) = 3, \text{si juega } b \end{cases}$$

- y su MR es

$$s_2 = \begin{cases} a, \text{si } \gamma > \dfrac{1}{2} \\ b, \text{si si } \gamma < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Análogamente, si el jugador 2 observa que el jugador 1 ha emitido la señal B, su pago esperado es

$$E[u_2] = \begin{cases} 6\mu + 0(1-\mu) = 6\mu, \text{si juega } a' \\ 3\mu + 3(1-\mu) = 3, \text{si juega } b' \end{cases}$$

- y su MR

$$s_2 = \begin{cases} a', \text{si } \mu > \dfrac{1}{2} \\ b', \text{si } \mu < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Empecemos suponiendo que $\gamma > \frac{1}{2}$ y $\mu > \frac{1}{2}$:
- El jugador 2 elige aa' (a si ha observado la señal A por parte del jugador 1 y a' si ha observado la señal B)
- A su vez, el jugador 1 puede elegir las estrategias AA (A si es de tipo x y, por tanto, el juego está en su conjunto de información izquierdo y A si es de tipo z, es decir, si está en su conjunto de información derecho), AB (A si el juego está en su conjunto de información izquierdo y B si está en su conjunto de información derecho), BA (B si el juego está en su conjunto de información izquierdo y A si está en su conjunto de información derecho) o BB (B si el juego está en su conjunto de información izquierdo y B si está en su conjunto de información derecho). Entonces

$$E[u_1] = \begin{cases} 6\gamma + 6(1-\gamma) = 6, \text{si juega } AA \\ 6\gamma + 6(1-\mu), \text{si juega } AB \\ 4\mu + 6(1-\gamma), \text{si juega } BA \\ 4\mu + 2(1-\mu) = 2(1+\mu), \text{si juega } BB \end{cases}$$

- y este jugador, sabiendo que el jugador 2 elegirá aa', elige AA (A si es de tipo x y A si es de tipo z). Ahora bien, por actualización bayesiana, resulta $\gamma = \frac{\frac{1}{3}1}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$, lo cual contradice el supuesto de que $\gamma > \frac{1}{2}$. En consecuencia, (AA, aa') no es un EBP del juego
- Supongamos ahora que $\gamma < \frac{1}{2}$ y $\mu > \frac{1}{2}$:
- En este caso, el jugador 2 elige la estrategia ba' (b si ha observado la señal A por parte del jugador 1 y a' si ha observado la señal B). A su vez, el pago esperado para el jugador 1 es
- $E[u_1] = \begin{cases} 3\gamma + 3(1-\gamma) = 3, \text{si juega } AA \\ 3\gamma + 2(1-\mu), \text{si juega } AB \\ 3(1-\gamma) + 4\mu, \text{si juega } BA \\ 4\mu + 2(1-\mu) = 2(1+\mu), \text{si juega } BB \end{cases}$

- y, sabiendo que el jugador 2 elige ba', elige BA (B si es de tipo x y A si es de tipo z). Pero entonces, por actualización bayesiana, $\mu = 1$, mientras que $\gamma = 0$, ya que el nodo izquierdo del conjunto de información superior del jugador 2 no se alcanza. En consecuencia, (BA, ba') es un EBP
- Supongamos ahora que $\gamma > \frac{1}{2}$ y $\mu < \frac{1}{2}$:
- En este caso, el jugador 2 elige ab' (a si ha observado la señal A por parte del jugador 1 y b' si ha observado la señal B). A su vez,
- $E[u_1] = \begin{cases} 6\gamma + 6(1-\gamma) = 6, \text{si juega } AA \\ 6\gamma - 2(1-\mu), \text{si juega } AB \\ 0 \cdot \gamma + 6(1-\mu), \text{si juega } BA \\ 4\mu + 2(1-\mu) = 2(1+\mu), \text{si juega } BB \end{cases}$
- Por tanto, la creencia revisada del jugador 2 sobre el tipo de jugador 1 es $\Pr(z|B) = \mu = 1$ y $\Pr(x|A) = \gamma = 0$ o, lo que es lo mismo, $\Pr(z|A) = 1 - \gamma = 1$. Se restablece la IC en el juego, una vez que los jugadores juegan el mencionado EBP

- y este jugador 1, sabiendo que el jugador 2 elegirá ab', elige AA (A si es de tipo x y A si es de tipo z). Pero entonces, por actualización bayesiana, $\gamma = \frac{1}{3}$, mientras que μ puede tomar cualquier valor arbitrario, porque el nodo izquierdo del conjunto de información inferior del jugador 2 no se alcanza en la trayectoria del equilibrio. Ahora bien, $\gamma = \frac{1}{3}$ contradice $\gamma > \frac{1}{3}$, por lo que (AA, ab') no es un EBP

- Supongamos, por último, que $\gamma < \frac{1}{2}$ y $\mu < \frac{1}{2}$:
- En este caso, el jugador 2 elige bb' (b si ha observado la señal A por parte del jugador 1 y b' si ha observado la señal B) y el pago esperado para el jugador 1 es

$$E[u_1] = \begin{cases} 3\gamma + 3(1-\gamma) = 3, \text{si juega } AA \\ 3\gamma - 2(1-\mu), \text{si juega } AB \\ 0 \cdot \mu + 3(1-\gamma) = 3(1-\gamma), \text{si juega } BA \\ 0 \cdot \mu - 2(1-\mu) = 2(\mu - 1), \text{si juega } BB \end{cases}$$

- y este jugador, sabiendo que el jugador 2 elegirá bb', elige AA (A si es de tipo x y A si es de tipo z). Pero, por actualización bayesiana, resulta $\gamma = \frac{1}{3}$, mientras que μ puede tomar cualquier valor, porque el nodo superior del conjunto de información de la derecha del jugador 2 no se alcanza en la senda de equilibrio. Por lo tanto, (AA, bb') es un EBP
- Es decir, las creencias *a posteriori* son las mismas que las creencias *a priori*

- El primer EBP se conoce como equilibrio *separador*, porque cada tipo de jugador 1 elige una estrategia distinta (la señal B si es de tipo x y la señal A si es de tipo z).

- Luego, la información privada queda revelada, ya que tras cada una de estas acciones, las creencias asignan probabilidad uno al tipo que la elige, es decir, todas las creencias a posteriori están completamente determinadas, ya que el jugador no informado acaba conociendo el tipo de jugador informado con el que ha jugado

- El segundo EBP se conoce como equilibrio *agrupador*, ya que los dos tipos de jugador 1 eligen la misma estrategia (el tipo x envía la señal A y el tipo z envía también la señal A). Como consecuencia, la información privada no se transmite: tras dicha acción, las creencias actualizadas coinciden con la probabilidad *a priori*.

- En este EBP tenemos que seleccionar, pues, la probabilidad μ para que exista equilibrio, ya que hay algún conjunto de información que no se alcanza en la trayectoria de equilibrio y, por tanto, tenemos libertad para elegir las creencias en esos nodos. En efecto, las creencias actualizadas del jugador 2 acerca del tipo de jugador 1, una vez observada la señal que ha enviado en el equilibrio, son tales que $\Pr(x|A) = \gamma = \frac{1}{3}$, que son las mismas que las creencias *a priori*