CAPÍTULO 0. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

(UN RESUMEN INSERVIBLE POR SÍ SÓLO)

Seguimos Antelo (2000), Cap. 0, pp. 1-66

FUNCIÓN. Qué es?

Caso más general: $f : x \in X \subset R^n \rightarrow f(x) \in Y \subset R^m$ (función vectorial de variable vectorial)

Dominio / Imagen, Rango o Recorrido

El dominio de una función f es el conjunto de existencia de la misma (conjunto de valores para los cuales está definida).

El conjunto imagen de una función f está formado por los valores que alcanza la función, i.e. es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente.

Ejemplo: $f(x) = x + 1$ tiene como dominio e imagen el conjunto R

$g(x) = x^2$ tiene como dominio R pero como imagen R_+

CARACTERIZACIÓN FUNCIONAL: Caso particular $f : X \subset R^n \rightarrow f(x) \in R$

1. Continuidad: $f(x)$ es continua en un punto $a \in X$ si:

- Existe $f(a)$:

  $\exists f(a)$

- tiene lim por la izquierda:

  $\exists \lim_{x \to a^-} f(a) \in \mathbb{R}$

- tiene lim por la derecha:

  $\exists \lim_{x \to a^+} f(a) \in \mathbb{R}$

- El lím por la derecha, el lim por la izquierda y el valor de la función coinciden:

  $\lim_{x \to a^-} f(a) = \lim_{x \to a^+} f(a) = f(a)$

2. Derivabilidad: La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente

Una función $f : X \to R$ es derivable en $x = a \in X$ si existe el lím

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dicho lim se llama derivada de $f(x)$ en $x = a$.

Geométricamente: la pte de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es igual a $f'(a)$ y por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = a$ se escribe como

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Resultado: Derivabilidad implica continuidad

Si una función $f(x)$ es derivable en $x=a$, i.e. si $\exists f'(a)$, entonces es continua en $x=a$

El recíproco no es válido, i.e. nada se puede afirmar sobre la derivabilidad de una función continua.

Ejemplo: la función valor absoluto **f(x)= |x|** es continua en todo su dominio pero no es derivable en x= 0

REPASAR TODO EL TEMA DE DIFERENCIABILIDAD

3. Tipos de funciones:

Funciones Elementales

- Funciones polinómicas (de grado n) Son las expresadas como un polinomio en x, i.e. una suma finita de potencias de x multiplicados por coeficientes reales

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

  - Función lineal: $f(x) = a_1 x + a_0$ es un binomio del 1º grado
  - Función cuadrática: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es un trinomio del 2º grado

- Funciones racionales: Funciones obtenidas al dividir una función polinomial por otra, no idénticamente nula $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$

- Función raíz: $f(x) = x^{1/n}$. Recíproca de la función potenciación $f(x) = x^n$

Funciones trascendentales

Cualquier función que no se puede expresar como una solución de una ecuación polinómica

- Función logarítmica: $f(x)=\log_a x$ o $f(x)=\ln x$

Qué forma tiene?

- Función exponencial: $f(x)=a^x$ o $f(x) = e^x$ (Inversa de la logarítmica)

Qué forma tiene?

- Funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, secante, cosecante, cotangente

- Funciones inversas trigonométricas

- Funciones hiperbólicas: seno hiperbólico, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica.

Funciones no elementales

- Función módulo (o valor absoluto): $f(x)=f(-x)$. Siempre toma valores no negativos
- Función escalón de Heaviside o escalón unitario $f(x)=\begin{cases} 0, si\ x<0 \\ 1, si\ x>0 \end{cases}$
- Función parte entera : f(x)=[x]=ent(x)
- Función potencial: $f(x) = x^a$
- Función mantisa y otras funciones
- Función signo
- Función de Dirichlet
- Función de Ackermann

- Transformaciones lineales
- Transformada de Hilbert
- Transformada de Laplace
- Transformada de Fourier
- Función hipergeométrica

Ver Ejercicio 0.3 de Antelo (2003), pp. 3-5.

4. Concavidad / Convexidad

Concavidad: $f : X \subset R^n \rightarrow f(x) \in R$ $\quad$ f cóncava sobre X:

(i) Sii para todo $x, z \in X$ y para todo $\alpha \in [0,1]$, se verifica $f(\alpha x + (1-\alpha)z) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(z)$

Qué significa esto geométricamente? Representarlo (Sólo posible de *R* en *R*)

Para funciones cuya imagen es un conjunto de mayor dimensión, es especialmente útil la siguiente caracterización de concavidad:

(ii) (Utilizando álgebra matricial) Sii su matriz Hessiana es una matriz sdn

IDEA: Esta condición equivale a exigir que la función se aleje siempre de cualquier tangente, independientemente de la dirección que se tome.

Matriz (hessiana) sdn sii menores principales alternan de signo empezando con no-positivo: $f_{11} \leq 0$,

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \ldots \; f_{ij} \equiv \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Convexidad:

(i) Análogo

(ii) Matriz hessiana sdp (signo no-negativo): $f_{11} \geq 0$, $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \ldots$

IDEA: La idea de que sea sdp es la misma de antes (por eso la representación de ambos tipos de función es la misma; véase Antelo (2000))

Ejercicio 1: ¿Qué tipo de función es $f(x) = -x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, para $\alpha, \beta > 0$?

Pequeño problema: Cómo es la función $f(x) = x^3$ en *R*? Hacer. Veréis que no es cóncava ni tampoco convexa [cóncava en (-∞,0) y convexa en (0, ∞)]. PERO, en todo *R* ¿qué es?...

…La existencia de funciones como la anterior obliga a definir una caracterización funcional (quizás) menos "fuerte" que la concavidad/convexidad.

Otro problema adicional añadido a éste:

Transformación Monótona de una función: Dada una función $f: x \in X \subset R^n \to f(x) \in R$ una TM de *f* es otra función *h* (lineal o no), *h*=*g*(*f*(x)), estrictamente creciente de *f*, i.e., $g' > 0$.

Ejemplos de TM de una función: Sumar o restar un escalar a la función, Multiplicar por un escalar positivo, elevar la función a un exponente impar, tomar el logaritmo de dicha función, tomar la exponencial,…

OJO: Diferenciar esto de una transformación afín!! Importante para el análisis de la función de utilidad en certidumbre y la función de utilidad (esperada) en incertidumbre.

Nos gustaría (para nuestro análisis económico) que cualquier TM de una función cóncava tb fuese cóncava. Pero esto no está garantizado que sea cierto.

Ejemplo 1: $f: R \to R$ definida como $f(x) = x$ es cóncava para todo $x \in R$ ($f'' \leq 0$). Sin embargo, la función $h: R \to R$ definida como $h = g(f(x)) = x^3$ es una TM de *f*, pero no es cóncava para todo $x \in R$, i.e. en (-∞,-∞), como lo era *f*; es cóncava tan solo en (-∞,0), en tanto que pasa a ser convexa en (0,∞).

Entonces, para qué tipo de funciones lo anterior es cierto? Para las que son **cuasicóncavas**.

5. Cuasiconcavidad / Cuasiconvexidad

Cuasiconcavidad: $f: x \in X \subset R^n \to f(x) \in R$ es cuasicóncava sobre *X*

(i) sii para todo $x, z \in X$ y para todo $\alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x + (1-\alpha) z) \geq \min\{f(x), f(z)\}$.

(ii) sii el conjunto $\{x \in X / f(x) \geq k\}$ es convexo (Podéis imaginar ya las curvas de indiferencia? Cómo son?,…)

Ejemplo 1 (continuación): Comprobar que la función $f(x) = x^3$ es cuasicóncava en todo *R*.

(iii) sii su Hessiano orlado (con las primeras derivadas parciales de la función) es una matriz sdn. Hessiano orlado es: $\begin{vmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & & f_{1n} \\ \vdots & & & \\ f_n & f_{n1} & & f_{nn} \end{vmatrix}$ y es matriz sdn si sus menores principales que conservan la orla alternan de signo, empezando con signo no-positivo: -, +, -, +,…

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix} \leq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \dots$$

Ejercicio 2: Resolver Ejercicio 0.6, Antelo (2003).

Resultado: Concavidad implica cuasiconcavidad, pero lo contrario no está garantizado

Resultado: Cualquier función $f: R \to R$ monótona decreciente es cuasicóncava (pero no cóncava)

✍ Sea la función (Cobb-Douglas) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$.

(i) Probar que dicha función es cuasicóncava

(ii) Probar que si $\alpha + \beta > 1$, no es cóncava (demostrando así que no todas las funciones cuasicóncavas son cóncavas)

✍ Otra función que utilizaremos mucho es la potencial: $f(x) = x^{\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Probar que es cóncava (y, por lo tanto, cuasicóncava). ¿Cuándo es e-cóncava?

✍ La forma multivariante de la función potencial es $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} + x_2^{\beta}$.

(i) Probar que también es cóncava (y cuasicóncava).

(ii) Una forma de incorporar efectos de "escala" en esta función es utilizar la TM $g(f(\cdot)) = [f(\cdot)]^{\delta} = [x_1^{\alpha} + x_2^{\beta}]^{\delta}$, donde $\delta > 0$. ¿Mantiene esta TM la concavidad de la función *f*?, ¿Es *g* cuasicóncava?

Cuasiconvexidad: Ver Antelo (2000), pp. 19 y ss.

Representación gráfica de una función cuasicóncava y cuasiconvexa: Es igual; sólo cambia el sentido en el que la función crece. Ver Antelo (2000), pp. 20-21.

6. Optimización. Programación No Lineal

a) Sin restricciones (No propia de la economía)

MAX f(x), MIN f(x) → CPO

b) Con restricciones o condicionada:

- por una o varias restricciones (lineales) en forma de igualdad $\rightarrow$ CPO aplicadas al lagrangiano

- por una o varias restric. en forma de desigualdad$\rightarrow$ Se generaliza el método de Lagrange; Teorema de Kuhn-Tucker

Ejercicio: Sea la función $f(x_1, x_2): R^2 \rightarrow R$ definida como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Resolver:

$$\text{MAX } f(x_1, x_2); \text{ MIN } f(x_1, x_2)$$

CPO (Necesarias)

Jacobiano de f es la matriz $Df(\cdot) = (2x_1, 2x_2)$.

Se necesita resolver el sistema de ecuaciones $Df(\cdot) = (2x_1, 2x_2) = (0,0)$. La solución es el punto $(x_1, x_2) = (0,0)$.

Punto Crítico

C.S.O. (Suficientes):

Hessiano de f es $D^2 f(.) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Evaluada en el punto (0,0), resulta $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Cómo es la función objetivo?</u>

Menores principales del Hessiano: $M_1 = 2 \geq 0$, $M_2 = 4 \geq 0$. Como no siguen el patrón -, + $\Rightarrow$ la función no es localmente cóncava $\Rightarrow$ no tiene un máx irrestricto en el punto (0,0), sino un mín irrestricto.

De hecho, los menores siguen el patrón ≥ 0, ≥ 0, ≥ 0,…→ H es sdp → la función es (localmente) convexa en el punto (0,0) → este punto no puede ser max.

El max (no finito) de la función está situado en los puntos (∞,∞), (∞,-∞), (-∞,∞) y (-∞,-∞)

Resolver ahora

$$MAX\ x_1^2 + x_2^2 \text{ , s.a: } x_1 + x_2 = 2; \quad MIN\ x_1^2 + x_2^2 \text{ , s.a: } x_1 + x_2 = 2$$

Ahora tenemos una f^{n} objetivo, $f(\cdot)=x_1^2+x_2^2$, y otra función más, $g(\cdot)=x_1+x_2-2=0$, que define el conjunto en el que optimizamos la f^{n} objetivo. Fuera de este conjunto, nada importa.

Hemos visto cómo atacar problemas de optimización: resolviendo un sistema de ecuaciones.

Sin embargo, cuando existen (una) restricción s/ las vs, surge una ecuación adicional (la restricción) sin que haya vs adicionales $\Rightarrow$ el sistema de ecuaciones está sobredimensionado.

La técnica lagrangiana introduce una variable adicional (el multiplicador) y no sólo ayuda a resolver el problema (pasamos a tener $n+1$ ecs con $n+1$ incógnitas), sino que en determinados contextos económicos tiene una interpretación muy útil (VER CAPS. 1 y 2 por ejemplo)

<u>Importante:</u> Bolzano-Weierstrass. Función objetivo **continua** y conjunto definido por la restricción **compacto** garantiza que la función alcanza MAX y MIN condicionados (estando, además, en el conjunto definido por la restricción).

En este caso, el conjunto $\{(x_1, x_2) / x_1 + x_2 = 2\}$ NO es acotado. Por lo tanto, la función puede tener (o no tener) MAX y MIN en dicho conjunto.

Función auxiliar de Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(x_1 + x_2 - 2)$$

donde λ es la variable adicional (además de las x's) llamada multiplicador de Lagrange.

Ahora se trata de MAX esta función (el cual es ya un problema no condicionado). Podemos aplicar lo de antes:

Matriz de primeras derivadas **(CPO)**

$$DL(x_1, x_2, \lambda) = (2x_1 - \lambda, 2x_2 - \lambda, -x_1 - x_2 + 2)$$

Resolviendo el sistema de CPO, $DL(x_1, x_2, \lambda) = (0,0,0)$, se obtiene el candidato a óptimo restringido $(x_1, x_2) = (1,1)$, con $\lambda = 2$. (Punto extremo).

Matriz de segundas derivadas **(CSO)**

Ahora tendremos una Hessiana ampliada con filas y columnas para reflejar el problema sin restricción (equivalente al problema con restricción que tenemos).

A partir de L_1 y L_2, el Hessiano orlado es $H(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Para que la función sea cuasicóncava, H debe ser sdn: menores con orla deben seguir el patrón -, +, -, +, …

Para MIN, H debe ser sdp: menores deben seguir el patrón +, +, +,…

Evaluado en el punto anterior resulta $H(1,1)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Los menores (conservando la orla) son:

$$\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1 \text{ y } \begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-4.$$

Dado que no alternan de signo, NO es una función cuasicóncava → el punto $(x_1,x_2)=(1,1)$ NO es un MAX local restringido de la función (de hecho es un MIN local restringido)

Los MAX restringidos de la función están situados en los puntos $(2,0)$ y $(0,2)$.

Representación de esta función: circunferencias con centro en (0,0). En el contexto de la utilidad, corresponde a una función de utilidad de preferencias estrictamente cóncavas (Solución de esquina!!)

✍ **Interpretación del multiplicador de Lagrange (Averiguar)**

Con más de una restricción: Similar. Introducimos tantos multiplicadores de Lagrange como restricciones haya (Ver arriba)

Con 2 restricciones, $g(x_1,x_2)$ y $h(x_1,x_2)$, entonces: $H(\cdot)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 & g_2 \\ 0 & 0 & h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 & L_{11} & L_{12} \\ h_1 & h_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$, etc.

Con restricciones en forma de desigualdad (Problemas típicos de la economía)

Es el tipo de Problema más general posible de Programación Lineal (PPL) o No Lineal (PPNL).

En un PPL, una función lineal es optimizada sujeta a restricciones lineales en forma de desigualdad.

En un PPNL:

(i) la función objetivo o alguna de las funciones restricción es no lineal,

(ii) o las restricciones tienen forma de desigualdad,

(iii) o ambas condiciones se verifican simultáneamente

Las **CPO** (de Kuhn-Tucker) son similares a las CPO en problemas con restricciones en igualdad, pero con dos diferencias:

1. Basta con que las derivadas parciales de la función auxiliar de Lagrange c.r.a. cada variable y a los multiplicadores sean no-positivas (para MAX), no-negativas (para MIN)

2. Surgen las condiciones de holgura complementaria (CHC) (que antes no existían). (Ver pp. 30 y ss. de Antelo (2000)).

Las **CSO** vuelven a ser las asociadas a la caracterización de la función objetivo

Ejemplo: $MAX -x^2 - 4x + 6$, s.a: $x \geq 0$

En problemas de MAX, es útil (re)escribir las restricciones en forma ≤ 0. En este caso,

$$MAX - x^2 - 4x + 6, \text{ s.a: } -x \leq 0$$

Lagrangiano es

$$L() = -x^2 - 4x + 6 + \lambda(-x)$$

Como sólo hay una variable y una restricción, las 6 CPO de Kuhn-Tucker, 3 (1+1), son:

$$\frac{\partial L}{\partial x} \equiv f'(x) = -2x - 4 \leq 0 \tag{1}$$

$$x\frac{\partial L}{\partial x} \equiv xf'(x) = x(-2x-4) = 0 \quad \text{(CHC)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x \leq 0 \tag{3}$$

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(-x) = 0 \qquad \text{(CHC)} \tag{4}$$

$$x \geq 0 \tag{5}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{6}$$

Se trata de resolver el sistema (1)-(6). Una buena regla consiste en empezar por la CHC. Los valores que satisfacen (2) son $x=0$ y $x=-2$. La condición (5) elimina $x=-2$ como posible solución, dejando sólo $x=0$. Finalmente, comprobamos que $x=0$ tb satisface la condición (1), por lo que la solución es $x^*=0$

Si $x^* = 0$, entonces $\lambda^* > 0$: La restricción se satura.

✍ **Comprobar que la función objetivo es cuasicóncava**

En problemas de MIN,

(i) Es útil escribir las restricciones en forma ≥ 0

(ii) Cambia es el signo de las derivadas con respecto a la vs a minimizar: pasa a ser ≥ 0

✍ Ejercicios 0.3, 0.6, 0.14, 0.15, 0.17, 0.19 y 0.20 de Antelo (2003).