# **CAP. 1: EL MODELO BÁSICO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS AGENTES A LA HORA DE CONSUMIR**

**Objetivo:** Analizar el fundamento económico de la toma de decisiones de consumo

**Recorrido analítico:**

① Formalización de la relación de preferencias del consumidor

② Restricción de riqueza

③ Problema del consumidor: Planteable como un problema de optimización condicionada por restricciones en desigualdad (Kuhn-Tucker)

- Primal: Max la utilidad, s.a: restricciones. Equilibrio: Demandas marshallianas de bs, función indirecta de utilidad

- Dual: Min el gasto, s.a: restricciones. Equilibrio: Demandas hicksianas de bs, función de gasto

④ Dualidad de la teoría del consumo. Fundamental!

⑤ Una vez determinado eq del consumidor, nos gustaría, en este modelo más básico posible,

1. Analizar las propiedades que la teoría impone a las f.d. por el hecho de proceder de un problema de optimización condicionado. <u>Propiedades a cumplir por las f.d. para poder ser tildadas de auténticas fd.</u>

2. Cómo varía el eq. del consumidor con los parámetros (Estática comparativa). Ecuación de Slutsky.

**Características del modelo**

- Estático
- Preferencias del consumidor están dadas
- Renta del consumidor exógena
- Precios de los bs están dados

## Topología de la relación de preferencias

$J$ bs en la economía, $j = 1,2,...,J$, $J < +\infty$

Cantidades susceptibles de ser consumidas: números reales no negativos, $q_j \geq 0$, $j = 1,2,...,J$

Espacio o conjunto de consumo: $X \subset R_+^J$

Elementos de $X$ (cestas de bs): $q = (q_1,...,q_j,...,q_J)$, $q_j \geq 0, \forall j = 1,...,J$, $q \neq 0$

Representar el espacio de consumo en R, $R^2$ y $R^3$

Entre estos elementos es donde el consumidor elige. Su elección dependerá de: (i) Preferencias, (ii) Riqueza

**Relación de preferencia (débil):** La relación binaria $\succeq$ definida como el conjunto

$$\succeq \equiv \{(q,q')/q,q' \in X, \text{q es al menos tan preferido como q', q} \succeq q'\} \subset X \times X$$

es una relación de preferencia débil (representa las preferencias del consumidor)

✍ Proponer ejemplos de otras relaciones binarias

**¿Qué propiedades deberíamos imponer a la relación binaria $\succeq$?**

**A1. Completitud**. Formalizar**… ✍ …**

Idea: Los individuos siempre son capaces de tomar una decisión

**A2. Reflexividad…**

Preferencias son internamente consistentes (no contradictorias)

**A3. Transitividad…**

Existe consistencia externa; el orden que el individuo fija entre alternativas debe mantenerse cuando se añaden más alternativas a considerar

✍ ¿Qué estructura topológica tiene una relación binaria que satisfaga A1-A3?

**A4. Continuidad**…

Una relación de preferencia $\succeq$ en $X$ es continua si es preservada bajo límites. Es decir, si para toda secuencia de pares $\{q^n, q'^n\}$, $n = 1,2,...,$ con $q^n \succeq q'^n$ para todo $n$, resulta $\lim_{n\to\infty} q^n \succeq \lim_{n\to\infty} q'^n$ …

… O si dada la sucesión de cestas de bs $\{q^n\}_{\substack{q^n \in X \\ n \in N}}$, todas ellas al menos tan preferidas como una cesta **q'**, y la sucesión converge a una cesta **q**, entonces **q** debe ser al menos tan preferida como **q'**…

… O si $\forall q \in X$ los conjuntos $\succeq q$ (conjunto de contorno superior o conjunto al menos tan preferido como **q**) y $\preceq q$ (conjunto de contorno inferior o conjunto al menos tan despreferido como **q**) son cerrados…

… O si $\forall q \in X$ los conjuntos $\succ q$ (conjunto de contorno estrictamente superior o conjunto e-preferido a q) y $\prec q$ (conjunto de contorno estrictamente inferior o conjunto e-despreferido a ***q***) son abiertos

**Ejemplo:** Un caso de no continuidad es relación preferencias lexicográficas, $\succeq_L$, definida, para $J$=2, como

$$q \succeq_L q' \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 > q'_1 \\ q_2 > q'_2 \text{, si } q_1 = q'_1 \end{cases}$$

✍ Comprobar que esta relación de preferencia no es continua

**Teorema:** Si una relación de preferencia $\succeq$ satisface A1-A4, es susceptible de ser representada mediante números (reales). Es decir, existe una f.u. $u : q \in X \subset R_+^J \to R$ continua tal que

$$\forall q, q' \in X,\ q \succeq q' \Leftrightarrow u(q) \geq u(q')$$

IMPORTANTE: **(a)** Una función de utilidad $u$ representa una única relación de preferencia $\succeq$ (Continúa en (b) más adelante)

Estos axiomas son **suficientes** para poder definir el problema del consumidor como un problema de max de una función (condicionada a restricciones)

CUIDADO!!! El que una relación de preferencia $\succeq$ no sea representable mediante una f.u. no implica que el problema del consumidor no tenga solución

Ejemplo: Si $J$=2 y $\succeq_L$ → solución es: $\{q_1^m(p_1, p_2, m), q_2^m(p_1, p_2, m)\} = \left\{\dfrac{m}{p_1}, 0\right\}$

Ahora bien, el problema es que con (solo) esto (A1-A4), la solución puede ser múltiple, de esquina, etc.

Si queremos ser más exigentes y garantizar que la solución será única, y además que el individuo gastará toda su renta, entonces es preciso añadir algunos supuestos más:

**A5. Monotonía …**

Implica no-saturación o no-saciedad local (…VER) y hace que las curvas de indiferencia sean decrecientes

**Pendiente de la CI:** RMS…

**A6. Convexidad …**

Implica RMS decreciente

Preferencia por la diversificación… ¿Algo más?

**Implicaciones para la utilidad**

**Proposición:** Si la relación de preferencia $\succeq$ viene representadas por una f.u. $u(\cdot)$, (A1-A4), entonces:

**(i)** Monotonía implica $q >> q' \Rightarrow u(q) > u(q')$ [ $u(\cdot)$ creciente]

**(ii)** Convexidad (e-convexidad) implica que toda $u(\cdot)$ que represente esa relación es cuasicóncava (e-cuasicóncava). Es decir, el conjunto $\{q' \in X \subset R_+^J | u(q') \geq u(q)\}$ es convexo (e-convexo) para todo **q**

**Proof.** Ver Antelo (2000), pp. 89-90.

FIG 1: La f.u. es cuasicóncava (ver Mathematica Fig 1)

FIG 2: Los conjuntos de indiferencia son convexos (ver Mathematica Fig 2)

Además, dada una f.u. $u(\cdot)$ cualquier TM de $u(\cdot)$ representa las mismas preferencias que $u(\cdot)$. (Importante exigir sólo cuasiconcavidad, no concavidad).

IMPORTANTE: (continuación de **(a)**): **(b)** Una relación de preferencia $\succeq$ puede ser representada por diferentes funciones de utilidad

Además,

(iii) Preferencias continuas y homotéticas implica que existe una f.u. $u(\cdot)$ homogénea de grado 1

$$u(aq) = \alpha^1 \, u(q), \forall \alpha > 0$$

(iv) Preferencias continuas y cuasilineales implica que existe una f.u. $u(\cdot)$ de la forma

$$u(q) = \alpha q_1 + z(q_2, \ldots, q_J), \quad \alpha > 0$$

✍ Entender bien que entre el principio de la *UMa* decreciente de los bs y el principio de la *RMS* decreciente no existe relación sistemática alguna. Utilizar para ello la función de utilidad $u(\cdot) = (q_1 q_2)^{\alpha}$, $\alpha > 0$ (1 punto)

**Resolución:** Dada $u(\cdot) = (q_1 q_2)^{\alpha}$, la *RMS* entre los bs 1 y 2 se define como $RMS_1^2 = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{u_1}{u_2}$.

En este caso, $RMS_1^2 = \frac{q_2}{q_1}$, con lo cual el decrecimiento de RMS exige que $\frac{dRMS_1^2}{dq_1} = \frac{-q_2}{q_1^2} < 0$. Es decir, esta relación de preferencia tiene la propiedad de que RMS es decreciente para cualquier valor que adopte el parámetro $\alpha$.

Por otra parte, la *UMa* del bien 1 se obtiene como $u_1 = \alpha q_1^{\alpha-1} q_2^{\alpha} > 0$ y la del bien 2 como $u_2 = \alpha q_1^{\alpha} q_2^{\alpha-1} > 0$. Para ver cómo evolucionan dichas *UMa*, basta con obtener:

$$\frac{du_1}{dq_1} = \alpha(\alpha-1) q_1^{\alpha-2} q_2^{\alpha} \quad \begin{cases} < 0, \; si \; \alpha < 1 \\ = 0, \; si \; \alpha = 1 \\ > 0, \; si \; \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{(Lo mismo para el bien 2)}$$

Es decir, la relación de preferencias exhibe *UMa* de los bs que pueden ser decrecientes, <u>constantes</u> o <u>crecientes</u>, mientras que la *RMS* entre dichos bs es siempre <u>decreciente</u>. Con esto se comprueba que no existe relación sistemática alguna entre el principio de la *UMa* decreciente de los bs y el principio de la *RMS* decreciente entre los bs. ■

## Ejemplos de preferencias

**Homotéticas / No homotéticas**

**Homotéticas:**

Una $\succeq$ es homotética si todos los conjuntos de indiferencia están relacionados entre sí por expansiones proporcionales a lo largo de radio-vectores. Es decir, si $\mathbf{q} \sim \mathbf{q}'$, entonces $\alpha\mathbf{q} \sim \alpha\mathbf{q}'$, para todo $\alpha>0$

✍ Representar gráficamente este resultado para el caso $J=2$

✍ Comprobar que la *RMS* entre dos bienes depende sólo de las cantidades relativas (no absolutas) consumidas de dichos bs (función homogénea de grado 0)

Sustitutivos: Escribir la función de utilidad con $J$=2 y analizar propiedades de dicha f.u. Generalizar para $J$ bienes

Complementarios: Lo mismo

Cobb-Douglas: Lo mismo

CES (elasticidad de sustitución constante): Lo mismo

Cóncavas: Lo mismo

✍ Comprobar que todas estas preferencias son homotéticas

**No Homotéticas:**

Cuasilineales:

Una $\succeq$ es cuasilineal (con respecto al bien 1, por ejemplo) si:

**(i)** Los conjuntos de indiferencia son desplazamientos paralelos de cada uno a lo largo del eje del bien 1

Formalmente, si $\mathbf{q} \sim \mathbf{q}'$, entonces $(\mathbf{q}+\alpha\mathbf{e}_1) \sim (\mathbf{q}'+\alpha\mathbf{e}_1)$, $\forall \alpha > 0$ y $e_1 = (1,0,\ldots,0)$

**(ii)** El bien 1 es deseable, i.e., $\mathbf{q}+\alpha\mathbf{e_1}\succ \mathbf{q}$

El bien 1 se conoce como *numerario*.

Si $J$=2, la f.u. $u(\cdot)$ que representa una $\succeq$ cuasilineal es del tipo $u(q_1,q_2)=f(q_1)+g(q_2)$, con $f''=0$ y $g''\neq 0$ (o viceversa)

✍ Poner un ejemplo concreto de una f.u. cuasilineal con $J$=2 y comprobar que no es homotética

✍ ¿Cómo es la $\succeq$ cuya representación numérica es $u(q_1,q_2)=\ln q_1 q_2$?

## El presupuesto del consumidor

Conjunto presupuestario

$$P(q,m)=\left\{q\in X \,\middle|\, \sum_{j=1}^{J} p_j q_j \le m\right\}\subset X$$

Conjunto cerrado y acotado

Frontera de este conjunto es la *restricción prespuestaria*

## Utilidad y gasto

Supongamos que:

(i) Preferencias del individuo no dependen de **p** ni del consumo de otros individuos

(ii) Preferencias se representan por una función $u: q \in X \subset R_+^J \to R$ de clase 2, (creciente y cuasicóncava; si queremos asegurar solución única)

(iii) El consumidor toma $(p,m) >> 0$ como dados

(iv) Conjunto presupuestario $P(p,m) = \{q \in X / pq \leq m\}$ **compacto**

**¿Conducta del consumidor?**

**Def.** (Eq individual). Es un vector de cantidades de los bs, $q^* = (q_1^*,...,q_j^*,...,q_J^*) \in X \subset R_+^J$, distinto del vector nulo, que resuelve el problema

$$\underset{q}{MAX}\, u(q), \text{ s.a:} \begin{cases} pq - m \leq 0 \\ q \geq 0 \end{cases}$$

**Idea:** Se trata de buscar $q^* \in X$ de manera que $q^* \succeq q$, $\forall q \in P(p,m) \subset X$

PPNL con $J$ vs y $J$+1 restric: Problema Primal del consumidor, Problema de max de la utilidad o Programa 1

**Lema:** Si las preferencias son convexas (e-convexas), entonces el conjunto de soluciones del Primal es convexo (solución es única)

✍ Resolver para $u(\cdot) = 2q_1 + q_2$ y $u(\cdot) = q_1^{1/4} q_2^{1/2}$. En ambos casos, $(p_1, p_2) >> 0$, $m > 0$.

**Proposición:** Caracterización del equilibrio cuando $u(\cdot)$ es diferenciable

Condiciones Necesarias de Kuhn-Tucker

Existe un multiplicador de Lagrange $\lambda \geq 0$ tal que $\frac{\partial u(q^*)}{\partial q_j} \leq \lambda p_j$, $(\frac{\partial u(q^*)}{\partial q_j} = \lambda p_j$, si $q_j^* > 0)$

Falta el resto de condiciones (CHC, etc.) hasta llegar a las 3(J+J+1) **Condiciones Necesarias** de Kuhn-Tucker y resolver el sistema

Si $q_j^* > 0$ y $q_{j'}^* > 0$, el equilibrio individual del consumidor se caracteriza por la condición

$$\frac{u'_j}{u'_{j'}} = \frac{p_j}{p_{j'}}, \quad \forall j, j' = 1,2,...,J; j \neq j'$$

Interpretar el resultado:…

Representarlo gráficamente:…

**Caso particular:** Si $q^* >> 0$, las 3(J+J+1) CPO anteriores se reducen a J+1 CPO en forma de igualdad sobre el lagrangiano

✍ Comprobar lo anterior

Dado el vector gradiente (matriz Jacobiana de $u(\cdot)$) $\nabla u(q^*) = \left( \frac{\partial u(q^*)}{\partial q_1}, ....., \frac{\partial u(q^*)}{\partial q_J} \right)$, entonces

$\nabla u(q^*) = \lambda p$: El vector gradiente evaluado en $q^*$ es proporcional al vector de precios $\boldsymbol{p}$

El multiplicador $\lambda$ representa el "coste sombra" de la restricción (la valoración marginal que el consumidor hace de la renta)

**CSO**

Las que garantizan que la f.u. $u(\cdot)$ es localmente cuasicóncava (en el punto de eq):

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & u_{11} & u_{12} \\ -p_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$ ¿Signo?...

o bien $$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$ ¿Signo?...

✍ Comprobar que (en el punto de equilibrio) estos dos determinantes son iguales

**Solución del Primal:** Funciones de demanda marshalliana $q_j^* = q_j^m(p,m)$ del tipo $q_j^m : R_{++}^{J+1} \rightarrow R_+$, $j$=1,…,$J$.

Indican, para cada conjunto de precios y renta a los que se enfrenta el consumidor, la cantidad que éste demanda de cada bien en el equilibrio (para max su utilidad).

$$q^*(p,m) = \arg\max_{q \in X} \; u(q), \quad s.a: q \in P(p,m)$$

Idea geométrica ($J$=2). Representar

✍ Qué sucede si la restricción presupuestaria es una función definida a trozos (y tiene uno o varios codos)?

✍ Resolver analíticamente para $u(\cdot) = q_1^{1/4} q_2^{1/2}$, $m = 100$, $p_1 = 2$ y $p_2 = \begin{cases} 2, \text{si } q_2 < 20 \\ 1, \text{si } q_2 \geq 20 \end{cases}$

Función de utilidad cuasilineal:

$u = f(q_1) + q_2,\ f' > 0,\ f'' < 0$

Cómo se derivan las f.d.m.?

$UMa_1 = f'(q_1)$

$UMa_2 = 1$

Entonces: $\frac{u_1}{u_2}=\frac{p_1}{p_2}$ da lugar a $\frac{f'(q_1)}{1}=\frac{p_1}{p_2}$ y podemos resolver directamente para $q_1^*$ para obtener

$q_1^*=q_1^m(p_1,p_2)$. Entonces, $q_2^*=q_2^m(p_1,p_2,m)=\frac{m-p_1q_1^*}{p_2}$.

Es decir, la f.d.m. del bien 1 no presenta ER; la del bien 2 sí.

**Función de utilidad indirecta:** Provee el (max) nivel de utilidad alcanzado por el consumidor

$$u(q^*(p,m))=\max\{u(q)/\,pq\leq m\}\equiv v(p,m)$$

◆ Aunque no es observable, es

◆ Importante porque permite conocer las cantidades demandadas en el eq(f.d.m.) sin necesidad de plantear y resolver el Primal.

**Proposición** (***Propiedades de la f.u.i.)***

- Continua en **p** y $m$
- No creciente en **p** y e-creciente en $m$
- Cuasiconvexa en **p**: El conjunto $\{(p,m) | v(p,m) \leq \bar{v}\}$ es convexo para todo $\bar{v}$
- Homogénea de grado 0 en **p** y $m$

Dada la función (de precios y renta) $v(p,m) = \dfrac{m^2}{4p_1p_2}$, comprobar que es una f.u.i.

✍ Interpretación económica del multiplicador de Lagrange $\lambda$ (en el equilibrio)

Aplicar teorema de la envolvente a $v(p,m)$.

## Problema Dual del consumidor

El problema del consumidor también se puede plantear (alternativamente) como

**Def.:** Un equilibrio del consumidor es (también) un vector $q^{\bullet} \in X \subset R_{+}^{J}$ que resuelve el problema

$$\underset{q}{MIN}\ pq\,,\quad s.a:\begin{cases} u(q) \geq u \\ q \geq 0 \end{cases}$$

Problema Dual, de minimización del gasto o Programa 2 del consumidor.

**Proposición:** El equilibrio individual se caracteriza por

$$\frac{u'_j}{u'_{j'}} = \frac{p_j}{p_{j'}}, \quad j, j'=1,\dots,J;\ j \neq j'$$

Misma caracterización que para el Primal!

**Solución:** Demandas hicksianas o compensadas $q_j^{\bullet} = q_j^h(p,u)$ del tipo $q_j^h : R_+^{J+1} \to R_+, j=1,\dots,J.$

Es decir, $q^{\bullet} = \arg\min_{q \in X} pq, \quad s.a : u(q) \geq u$

**Proposición:** El equilibrio del consumidor es el mismo con independencia de cómo se obtenga.

Al igual que en el Primal, en el Dual es importante determinar el valor que alcanza en el eq la función objetivo

**Def:** (Función de gasto o función de valor del dual): $p\, q^{h}(p,u) = \min\{pq \,/\, u(q) \geq u\} \equiv e(p,u)$

Importancia de la función de gasto:

- Es la inversa de la f.u.i. (y, por lo tanto, sirve para medir la utilidad al igual que la f.u.i.)
- Subsana las deficiencias de la f.u.i. porque la f.g. es observable

⇒ Medición monetaria del bienestar: Estará basada en la utilización de la función de gasto (CAP. 3)

◆ Permite derivar las cantidades demandadas en el eq (f.d.h.) sin necesidad de plantear y resolver el dual

**Proposición** (***Propiedades de la función de gasto***)

⌘ Continua en **p** y *u*

⌘ No decreciente en **p** y e-creciente en *u*

⌘ Cóncava en **p**

⌘ Homogénea de grado 1 en **p**

✍ Dada la función (de precios y utilidad) $e(p,u)=(p_1+2\sqrt{p_1p_2}+p_2)u$, comprobar si es una f.g.

## Identidades y Teoremas de dualidad en la teoría del consumo

**Proposición.** Supongamos: (i) que la función de utilidad $u()$ es continua y representa una relación de preferencia $\succeq$ localmente no-saciable, (ii) $\boldsymbol{p}>>\mathbf{0}$, (iii) que ambos programas tienen solución, i.e.

$$v(p,m)=\max u(q), \quad s.a: pq \le m \tag{1}$$

$$e(p,u)=\min pq, \quad s.a: u(q) \ge u \tag{2}$$

Entonces:

**(i)** Si $q^*$ es solución de (1) con renta $m>0 \Rightarrow q^*$ es solución de (2) con $u=v(p,m)$

**(ii)** Si $pq^{*} > 0$ y $q^{\bullet}$ es solución de (2) con utilidad requerida $u > u(0) \Rightarrow q^{\bullet}$ es solución de (1) con renta $m = e(p,u)$

**Dem**. Ver Antelo (2000)

Ilustración gráfica (Fig 14, p. 105)

La proposición anterior implica las siguientes

**Identidades Fundamentales**

1. $e(p,v(p,m)) \equiv m$: Con un gasto min siempre se puede alcanzar la utilidad max

2. $v(p,e(p,u)) \equiv u$: El nivel max de utilidad siempre se puede alcanzar con un gasto mínimo

3. $q^m(p,m) \equiv q^h(p,v(p,m))$: La demanda marhalliana de cada bien correspondiente al nivel de renta m coincide con la demanda hicksiana asociada al nivel de utilidad max

4. $q^h(p,u) \equiv q^m(p,e(p,u))$: La demanda hicksiana de cada bien correspondiente al nivel max de utilidad es igual a la demanda marshalliana correspondiente a la renta min

**Lema (Lema de Shephard)** (Relación entre las demandas hicksianas y el gasto)

Si:

(i) $u(\cdot)$ es una f.u. continua que representa una relación de preferencia $\succeq$ localmente no saciable y e-convexa,

(ii) la f.g. es diferenciable en los precios de los bs, entonces para todo $\boldsymbol{p}$ y $u$, la f.d.h. de cada bien $j$ es

$$q_j^h(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j}$$

**Identidad de Roy** (Relación entre las f.d.m. y la utilidad indirecta). Supongamos que:

(i) $u(\cdot)$ es una f.u. continua que representa una relación de preferencia $\succeq$ localmente no saciable y e-convexa,

(ii) $v(\cdot)$v es diferenciable en $(\boldsymbol{p},m)$,

(iii) $\dfrac{\partial v(\cdot)}{\partial m} \neq 0$.

Entonces, la f.d.m. de cada bien $j$ se obtiene como

$$q_j^m(p,m) = -\frac{\dfrac{\partial v(p,m)}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial v(p,m)}{\partial m}}$$

## Propiedades del equilibrio individual

### Propiedades de las f.d.m.

♠ Homogeneidad de grado 0 en (**p**,m)

♠ Satisfacen la ley de Walras: $\forall p >> 0$ y $\forall m > 0$, $p\, q^m(\cdot) = m$

El consumidor gasta toda su renta (es lo que cabe esperar al menos en un mundo sin incertidumbre)

♠ Si las preferencias son convexas, el conjunto de soluciones del Primal es convexo

♠ Si las preferencias son e-convexas, el conjunto de soluciones del Primal tiene un único elemento

♠ El equilibrio es invariante ante cualquier TM de la función de utilidad

♠ En el equilibrio, el multiplicador de Lagrange es la utilidad marginal de la renta,
$\lambda^* = \dfrac{\partial u}{\partial m} \equiv \dfrac{\partial v(p,m)}{\partial m}$

Completar por el libro (ver pp. 109-113)

**Propiedades de las f.d.h.**

★ Homogéneas de grado 0 en ***p***

★ Gasto igual a renta: En el eq., el valor de las demandas hicksianas es igual a la renta disponible

★ Convexidad: Si $\succeq$ es convexa, $q^h(p,u)$ es un conjunto convexo

Unicidad: Si $\succeq$ es e-convexa, $q^h(p,u)$ es un conjunto con un único elemento

★ En el eq., el multiplicador de Lagrange $\mu$ representa el coste implícito de la restricción de utilidad; $\mu^{\bullet} = \dfrac{\partial e(p,u)}{\partial u}$

## ¿Cómo relacionar los dos tipos de demanda?

**Ecuación de Slutsky**. Supongamos que $u(\cdot)$ es una f.u. continua que representa una relación de preferencia $\succeq$ localmente no saciable y e-convexa. Entonces para todo $(\boldsymbol{p},m)$ y $u = v(p,m)$, resulta:

$$\frac{\partial q_j^m(p,m)}{\partial p_{j'}} = \frac{\partial q_j^h(p,u)}{\partial p_{j'}} - \frac{\partial q_j^m(p,m)}{\partial m} q_{j'}^m(p,m), \ \forall j, j'=1,...,J$$

La variación de la f.d.m. del bien *j* cuando cambia el precio del bien *j'* es igual a…COMPLETAR…

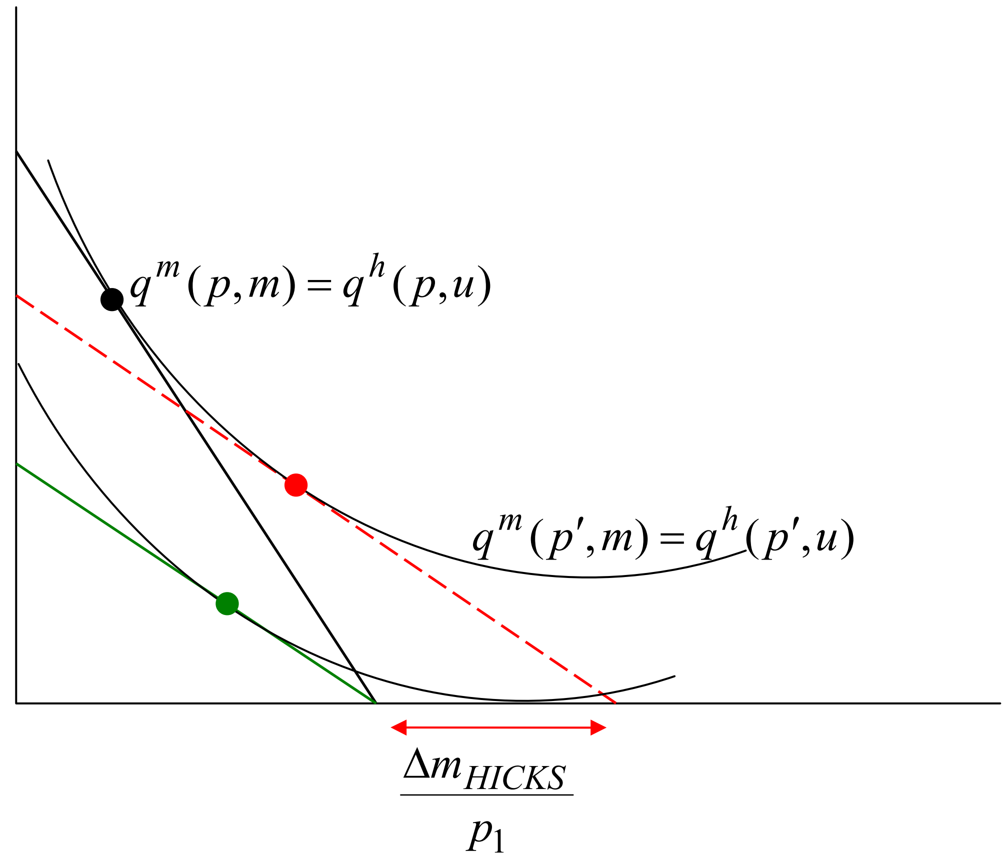
Remarks:

→ Descomposición del efecto sobre la demanda de un bien del cambio en el precio (ET=ES+ER); $ER \equiv -\frac{\partial q_j^m(p,m)}{\partial m} q_{j'}^m(p,m)$.

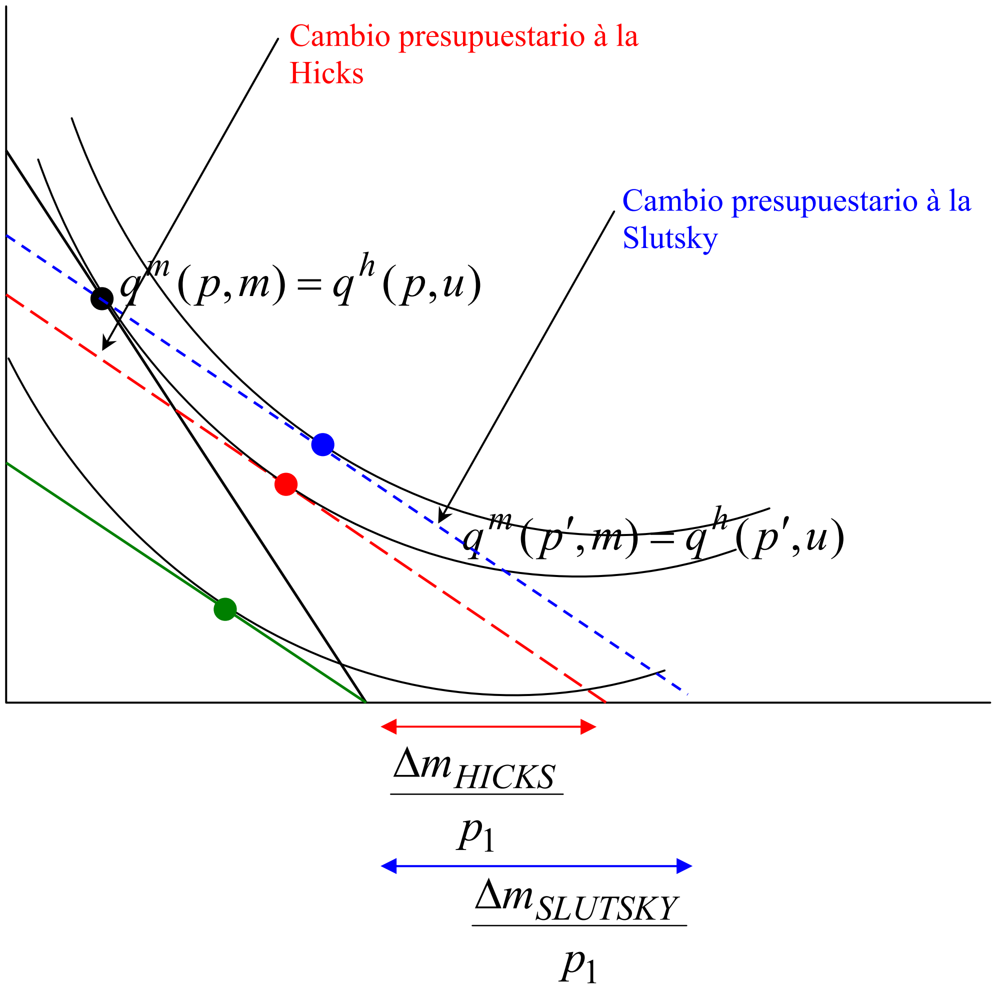
→ Efectos directos ( $j = j'$ ) y efectos cruzados ( $j \neq j'$ )

→ La "descomposición" efectuada aquí es la hicksiana. Hay otra posibilidad: descomposición à la Slutsky.

Compensación hicksiana de renta




Compensación Hicksiana vs. Compensación de Slutsky




Adoptamos la compensación à la Hicks:

Con $J$ bienes, las JxJ Ecuaciones de Slutsky se escriben, en notación matricial, como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q_1^m}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial q_1^m}{\partial p_J} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial q_J^m}{\partial p_1} & & \frac{\partial q_J^m}{\partial p_J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1^h}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial q_1^h}{\partial p_J} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial q_J^h}{\partial p_1} & & \frac{\partial q_J^h}{\partial p_J} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1^m}{\partial p_1} q_1^m & \cdots & \frac{\partial q_1^m}{\partial p_J} q_J^m \\ \vdots & & \\ \frac{\partial q_J^m}{\partial p_1} q_1^m & & \frac{\partial q_J^m}{\partial p_J} q_J^m \end{pmatrix}$$

Matriz de Slutsky o de Efectos Sustitución, ***S***.

La Max de la utilidad implica que la matriz de Slutsky $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p},u)$ es:

- Simétrica
- Sdn

**Corolario:** Efecto sustitución directo es no positivo, $s_{jj} = \frac{\partial q_j^h(p,u)}{\partial p_j} \leq 0$. La ley de la demanda se verifica en términos hicksianos

Ley de la demanda (Hicksiana)

**Proposición:** Supongamos que $u(\cdot)$ es una f.u. continua que representa una $\succeq$ no saciada localmente y que $q^h(p,u)$ es un conjunto formado por un único elemento para todo $(p,u)$. Entonces la demanda hicksiana satisface la ley de la demanda (compensada):

$$(p' - p)[q^h(p',u) - q^h(p,u)] \leq 0, \ \forall p, p'$$

**Proof**: Tenemos que $p'q^h(p',u) \le p'q^h(p,u)$

y $\quad pq^h(p',u) \le pq^h(p,u)$

Restandо, se obtiene el resultado. ■

● Satisface $S(\boldsymbol{p},u)\,\boldsymbol{p} = 0$

Más en general. Si una f.d.m. continuamente diferenciable es generada por una relación de preferencia racional (completa y transitiva), entonces:

(i) Es homogénea de grado 0

(ii) Satisface la Ley de Walras: $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{p} = 0$

(iii) $\boldsymbol{S}$ es una matriz simétrica

(iv) $\boldsymbol{S}$ es una matriz sdn

## Problema de la Integrabilidad

⬣ Hasta ahora, la pregunta ha sido: Dadas unas preferencias regulares, ¿qué propiedades han de satisfacer las demandas que surgen de la max (min) condicionada de la utilidad (gasto)?
¿Qué restricciones han de cumplir las f.d. para poder afirmar que son auténticas f.d.m (son las observables!) derivadas del Primal?

⬣ La cuestión a plantear ahora es: Dadas unas determinadas f.d.m. (que definen la conducta observada del consumidor en el mercado) y que poseen las propiedades estipuladas, ¿bajo qué condiciones podemos afirmar que existe una f.u. consistente con el comportamiento observado del individuo?

¿Toda f.d.m. continuamente diferenciable que satisfaga las propiedades que hemos impuesto se puede racionalizar por alguna relación de preferencia racional $\succeq$ y la maximización de utilidad?

Se trata de "recuperar" las preferencias del consumidor (inobservables) observando su conducta de demanda

Consideremos *J*=2 y un punto arbitrario $(p^0, m^0)$ [condiciones iniciales del problema]. Observemos las cantidades (marshallianas) demandadas de cada bien por parte del consumidor, $q_1^0(p^0, m^0)$ y $q_2^0(p^0, m^0)$, y asignémosle un nivel arbitrario de utilidad $u^0 = u(q_1^0, q_2^0)$. Sabemos que en el punto dado por estas cantidades

$$\frac{u_1(q^0)}{u_2(q^0)} = \frac{p_1^0}{p_2^0}$$

Es decir, "aproximamos" la pendiente de la C.I. correspondiente

Si repetimos el proceso para otros datos de precios y renta distintos de $(p^0, m^0)$, obtenemos una aproximación de las C.I. (de la relación de preferencias)

Formalmente: Una vez definida la condición inicial $(p^0, m^0)$, definidas las demandas y asignado el nivel de utilidad arbitrario $u^0 = u(q_1^0, q_2^0)$, por el Lema de Shepard y la Identidad 3 de la Dualidad, el sistema de f.d.m. es

$$\frac{\partial e(p,u^0)}{\partial p_j} = q_j^m(p,e(p,u^0)) \ , \ j = 1,...,J$$

y

$$e(p^0,u^0) = p^0 \times q^0(p^0,m^0) = c$$

Donde $\boldsymbol{p}$ y $c$ están dados.

Si podemos integrar el sistema anterior de derivadas parciales, obtenemos la función de gasto $\Rightarrow$ obtenemos la función de utilidad indirecta

**Proposición:** Existe solución de dicho sistema (i.e., existe una función de gasto $e(p,u)$ que resuelve el sistema anterior) sii $s_{jj'} = s_{j'j}$, $\forall j, j' = 1,...,J$.

Y esto es cierto!!

**Ejemplo:** Dadas las f.d.m. $q_j^m(\cdot) = \dfrac{\beta_j m}{\beta p_j}$, donde $\beta = \sum_{j=1}^{J} \beta_j$, encontrar la relación de preferencias que "está detrás" de dichas f.d.m.

**Resolución:** El sistema de ecuaciones en derivadas parciales es

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j} = q_j^m(p, e(p,u)) = \frac{\beta_j e(p,u)}{\beta p_j}, \quad j = 1,\ldots,J$$

o bien,

$$\frac{1}{e(p,u)} \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\beta_j}{\beta} \frac{1}{p_j}, \quad j = 1,\ldots,J$$

Integrando la $j$-ésima condición con respecto a $p_j$, resulta

$$\ln e(p,u) = \frac{\beta_j}{\beta} \ln p_j + c$$

Sumando para todo $j$,

$$\ln e(p,u) = \sum_j \frac{\beta_j}{\beta} \ln p_j + c$$

y, basta con fijar $c = \ln u$, para llegar a

$$\ln e(p,u) = \sum_j \frac{\beta_j}{\beta} \ln p_j + \ln u$$

Finalmente, invirtiendo esta expresión, obtenemos:

$$\ln v(p,m) = -\sum_j \frac{\beta_j}{\beta} \ln p_j + \ln m$$

que es una TM de una f.u.i. que representa preferencias Cobb-Douglas:

$$v(p,m) = \prod_j p_j^{-\sum_j \frac{\beta_j}{\beta}} \times m = \frac{m}{\prod_j p_j^{\sum_j \frac{\beta_j}{\beta}}}$$

Esta es la f.u.i que “está detrás” de las f.d.m. planteadas.■

## Demanda agregada

Supongamos que en la economía hay $I$ consumidores, $i = 1,2,...,I$, cada uno con la f.d.m. $q_j^{mi}(p,m^i)$ del bien $j$. La demanda agregada (DA) del bien $j$ es

$$Q_j^m(p,m^1,...,m^I) = \sum_{i=1}^{I} q_j^{mi}(p,m^i)$$

Implicación: La DA depende de la distribución de la renta total $m$, $m \equiv \sum_{i=1}^{I} m^i$

## Riqueza Agregada

¿Bajo qué condiciones podemos encontrar una f.d.m. agregada $Q_j^m(p, \sum_{i=1}^{I} m^i)$ tal que

$$Q_j^m(p, \sum_{i=1}^{I} m^i) = \sum_{i=1}^{I} q_j^{mi}(p, m^1, \ldots, m^I)?$$

En este caso, si la renta cambia en $(dm^1, \ldots, dm^I)$, siendo $\sum dm^i = 0$ (la cuantía total de renta no varía), entonces para todo bien $j$, resulta:

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{\partial q_j^{mi}}{\partial m^i} dm^i = 0$$

Una condición **suficiente y necesaria** para que esto ocurra es que para todo *I*, *i*, *i'* y $(m^1,\ldots,m^I)$, suceda que

$$\frac{\partial q_j^{mi}(p,m^i)}{\partial m^i} = \frac{\partial q_j^{mi'}(p,m^{i'})}{\partial m^{i'}},$$

Es decir, que $\frac{\partial q_j^{mi}(p,m^i)}{\partial m^i}$ sea independiente de *i*.

Esto significa que todas las sendas de expansión de la renta tienen la misma pendiente.

**Proposición:** La DA es independiente de la distribución de la renta sii la f.u.i. de todos los consumidores puede ser representada en la **forma de Gorman**

$$v^i(p,m^i) = a^i(p) + b(p)m^i$$

**Proof.** Aplicando la Identidad de Roy se obtiene

$$q_j^{mi}(p,m) = -\frac{\partial a^i(p)/\partial p_j}{b(p)} + \frac{\partial b(p)/\partial p_j}{b(p)} m^i$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial q_j^{mi}(p,m^i)}{\partial m^i} = \frac{\partial b(p)/\partial p_j}{b(p)}$$, i.e. es independiente de $i$. ■

Resultado bastante restrictivo. Casos especiales: preferencias idénticas y homotéticas; preferencias cuasilineales

Sin embargo, supongamos que la riqueza de los individuos es generada por los precios y la riqueza agregada: $m^i = m^i(p,m)$

Regla de distribución de la riqueza: Familia de funciones $(m^1(p,m),...,m^I(p,m))$ con $\sum_i m^i(p,m) = m$ para todo $(p,m)$

En este caso, $Q(p,m^1,...,m^I) = \sum_i q^i(p,m^i(p,m) = Q(p,m)$

Pero ahora $Q(p,m)$ depende de la regla de distribución de riqueza.

Por ejemplo: la regla de distribución de riqueza $\alpha = (\alpha^1,...,\alpha^I)$, con $\sum_i \alpha^i = 1$, dada por $m^i(p,m) = \alpha^i m$

Proposición: Sea la regla $\alpha = (\alpha^1,...,\alpha^I)$ con $\sum_i \alpha^i = 1$, dada por $m^i(p,m) = \alpha^i m$. Supongamos que $q^i(p,m^i)$ satisface la ley de la demanda no compensada. Entonces también la DA $Q(p,m) = \sum_i q^i(p,\alpha^i m)$ satisface la propiedad de la ley de la demanda no compensada.

Proof. Consideremos $(p,m)$ y $(p',m)$ con $Q(p,m) \neq Q(p',m)$. Entonces para algún i, $q^i(p,\alpha^i m) \neq q^i(p',\alpha^i m)$.

La ley de la demanda no compensada implica que

$(p'-p)[q^i(p',m^i) - q^i(p,m^i)] < 0$

Para todo $i' \neq i$, $(p'-p)[q^{i'}(p',m^{i'})-q^{i'}(p,m^{i'})] \leq 0$

Sumando sobre $1,...,I$, resulta $(p'-p)[Q(p',m)-Q(p,m)]<0$. ■

Proposición: Si $\succeq^i$ es homotética, entonces $q^i(p,m^i)$ satisface la ley de la demanda no compensada.

Proof. Hacer.

**Consumidor representativo**

**Definición.** Un consumidor representativo positivo existe si hay una relación de preferencia $\succeq$ racional (completa y transitiva) tal que la función de DA del bien $j$, $Q_j(p, \sum m^i)$, es la función de demanda generada por esta $\succeq$

**Definición.** Una función de bienestar social (Bergson-Samuelson) es una función $W : R^J \to R$ que asigna un nivel de utilidad a cada posible vector $(u_1,...,u_I)$ de niveles de utilidad para los $I$ consumidores de la economía

Redistribución de la riqueza:

$$\max_{m_1,...,m_I} W(v_1(p,m_1),...,v_I(p,m_I)), \text{ s.a}: \sum_i m_i \leq m$$

Una solución $\{m_i(p,m)\}_i$ de este problema es una regla de distribución de la riqueza

Su valor $v(p,m)$ es una f.u.i. de un consumidor representativo con f.d.m. $Q(p,m) = \sum q_i(p, m_i(p,m))$

**Definición.** Un consumidor (normativo) representativo con respecto a la función de bienestar social $W(\cdot)$ es un consumidor (positivo) representativo para la función de DA $Q(p,m)=\sum q_i(p,m_i(p,m))$, donde $m_i(p,m)$ coincide con la regla de distribución de riqueza inducida por $W(\cdot)$