2. TEORÍA DEL COMPORTAMIENTO DE LOS AGENTES PRODUCTORES COMPETITIVOS

Seguimos: Antelo (2000), Cap. 4; Antelo (2003), Cap. 2

Modelo altamente estilizado:

- Competencia perfecta
- Estático
- No incertidumbre
- No conflictos internos
- No se plantea la cuestión de la organización
- Empresa maximiza el beneficio

La empresa es una caja negra (black box): Transforma inputs en outputs mediante alguna regla

Objetivos del Capítulo:

❶ Analizar la forma en que las empresas producen bienes utilizando distintas combinaciones **tecnológicamente** viables de inputs

❷ Plantear y resolver el problema de la empresa a la hora de elegir el/los procesos productivos **económicamente** eficientes

❸ Analizar la **dualidad** existente entre la producción y los costes (de producción)

Cap. 1 (Tª del consumo) → Empezamos describiendo las propiedades requeridas a la relación de preferencia $\succeq$ definida en $X \subset R_+^J$ (para poder modelizar el problema como un PPNL)

Ahora, para poder representar el problema de la empresa como un PPNL empezamos describiendo las propiedades requeridas al conjunto de planes de producción **factibles** para la empresa, dada su tecnología

Cómo representar la tecnología de la empresa

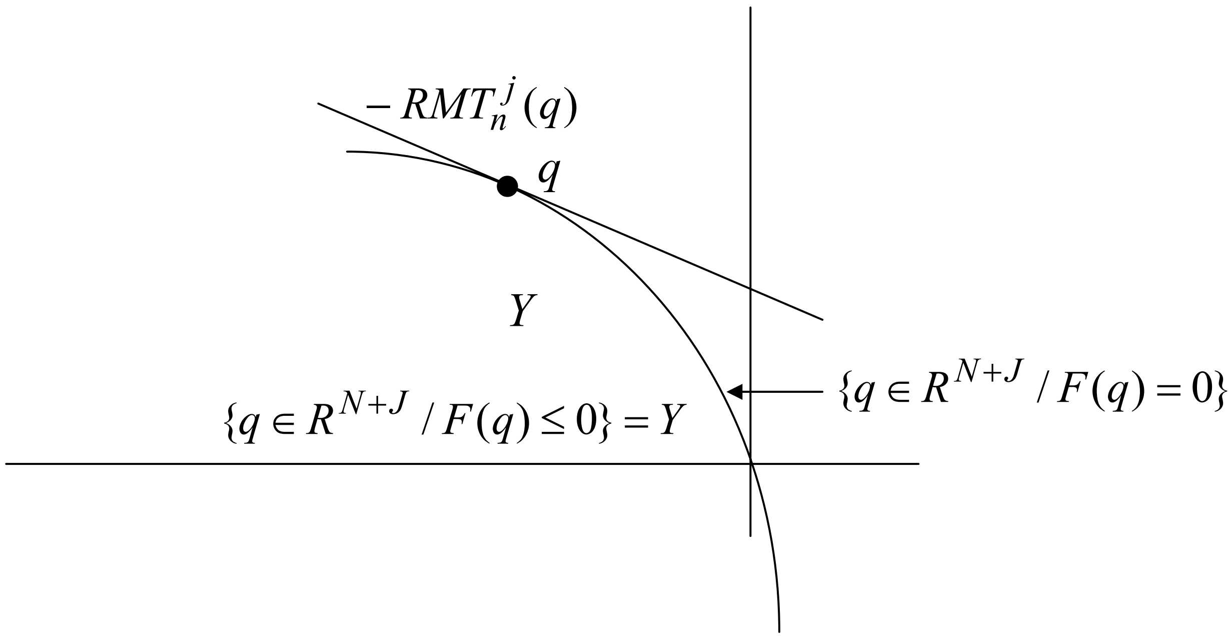
Consideremos una empresa que utiliza cantidades de N inputs, $n = 1,...,N$, para obtener cantidades de J productos, $j = 1,...,J$ (empresa multiproducto)

Def: Un plan de producción (o proceso productivo) **factible** o **viable** es una lista (vector) de inputs y outputs en una empresa, representada por un vector de inputs-outputs o vector netput $q = (q_1,...,q_N, q_{N+1},...,q_{N+J}) \in R^{N+J}$, donde $q_n < 0$ ($q_j \geq 0$) indica que el componente n-ésimo (j-ésimo) es un input (un output)

Al conjunto de todos los planes de producción factibles se le llama ***C.P.* o *C.P.P.*, *Y***

$$Y = \{q \in R^{N+J} \mid q \text{ es un plan de producción factible}\}$$

Ilustración para N=1 y J=1:



Función de transformación F: es una función $F : R^{N+J} \to R$ tal que

$$\{q \in R^{N+J} \,/\, F(q) \leq 0\} = Y$$

Frontera de (la función de) transformación:

$$\{q \in R^{N+J} \,/\, F(q) = 0\}$$

Relación o Tasa Marginal de Transformación:

$$RMT_n^j(q) = \frac{\partial F(q) / \partial q_n}{\partial F(q) / \partial q_j}$$

Supuestos sobre los C.P., *Y*

A1. $0 \in Y$ (Posibilidad de inactividad)

Es posible suspender la actividad (más razonable a largo plazo que a corto plazo)

A2. Monotonía de la tecnología o libre disposición:

Si $q \in Y$ y $q' \leq q$, entonces $q' \in Y$

A3. No gratuidad de la producción (no free lunch)

Si no hay inputs, no hay output: $q \in Y$, con $q_j > 0 \Rightarrow \exists n$ de manera que $q_n < 0$.

Alternativamente, si $q \in Y$ y $q \geq 0$, entonces $q = 0$

A4. Y es cerrado…

A5. Y es convexo…

$\Rightarrow$ Planes de producción perfectamente divisibles

A6. Irreversibilidad de la producción: Si $q \in Y$ y $q \neq 0 \Rightarrow -q \notin Y$

Def. (**Eficiencia**) Si $Y \subset R^{N+J}$ es un C.P.,

(i) El plan de producción $q \in Y$ es **técnicamente eficiente** sii no es posible encontrar otro proceso $q' \in Y$, $q' \neq q$, tal que $q' \geq q$

(ii) El proceso $q \in Y$ es **económicamente eficiente** sii con las cantidades de inputs y outputs de q no es posible obtener más beneficio del que se obtiene con q

Proposición: Si $q \in Y$ maximiza el beneficio para algún vector $p >> 0$, entonces q es eficiente tecnológicamente (lo contrario, no es necesariamente cierto)

Demostración: Supongamos que no. Entonces existe $q' \in Y$ tal que $q' \geq q$ (y $q' \neq q$). Por lo tanto, $pq' > pq$, lo cual contradice la optimalidad técnica de q. ■

Lo que sí es cierto es:

Proposición: Si Y es convexo, entonces todo proceso técnicamente eficiente $q \in Y$ es también económicamente eficiente para algún vector de precios $p \geq 0$

Demostración: Sea q técnicamente eficiente. Definamos $P_q = \{q' \in R^{N+J} | q' >> q\}$. Es fácil ver (i) que P_q es convexo, (ii) que $P_q \cap Y = \varnothing$.

Por el teorema del hiperplano separador $\exists p \neq 0$ tal que $pq' \geq pq''$ para todo $q' \in P_q$ y $q'' \in Y$. En particular, $pq' \geq pq$ para todo $q' >> q$. Esto implica que $p \geq 0$ (si no fuese así, entonces existe un $p_i < 0$. Por lo tanto, $pq' < pq''$ para algún $q'' \in Y$ con $q_l' - q_l$ suficientemente elevado.)

Para todo $q'' \in Y$, $pq' \geq pq''$ para todo $q' \in P_q$. Ya que podemos tomar q' arbitrariamente cercano a *q*, entonces $pq \geq pq''$. ■

Si nos limitamos a $J = 1$ (**empresas uniproducto**), los vectores netput se pueden expresar $(-x_1,...,-x_N, q) = (-x, q)$. En este caso, hay una forma de describir la tecnología alternativa a la dada por *Y*: A través de **conjuntos de requerimientos de inputs** de nivel *q*, $V(q)$ [conjuntos de necesidades de inputs]

Def. Dado el nivel de output $q \geq 0$, el **c.r.f.p.** de nivel q es el conjunto de todas las combinaciones de inputs que permiten producir como mínimo (por lo menos) q unidades de output

$$V(q) = \{x \in R_+^N \mid (-x, q) \in Y\}$$

Propiedades de (la tecnología cuando se representa mediante) *V*(*q*)

✍ ….Completar por el libro…

Los procesos de producción técnicamente eficientes son los que están en la frontera de $V(q)$. A dicha frontera se le conoce como **isocuanta de nivel *q***, $I(q)$

$$I(q) = \{x \in R^N \mid x \in V(q) \quad y \quad x \notin V(q'), \quad \forall q' > q\}$$

o

$$I(q) = \{x \in R^N \big| (-x,q) \in Y \quad y \quad (-x,q) \notin Y, \quad \forall q' > q\}$$

Pendiente de la Isocuanta: *TMSF*, *TMST* o *RTS*… Completar…

Elasticidad de sustitución σ…

La forma de representar los procesos productivos técnicamente eficientes es a través de la **función de producción**, $q = f(x)$:

Def: $f(x) = \{q \in R_+ \big| (-x,q) \in Y \quad y \quad (-x,q') \notin Y, \quad \forall q' > q\}$

Alternativamente, $f(x) = \{q \in R_+ \big| q \text{ es el max nivel de output asociado con } -x \in Y\}$

🗣 Con la cantidad x de inputs podemos producir, como mucho, la cantidad q de output

Propiedades de $f(x)$

● No decreciente (Productividades marginales no negativas)

● Cuasiconcavidad (RMST decreciente, Productividades marginales…

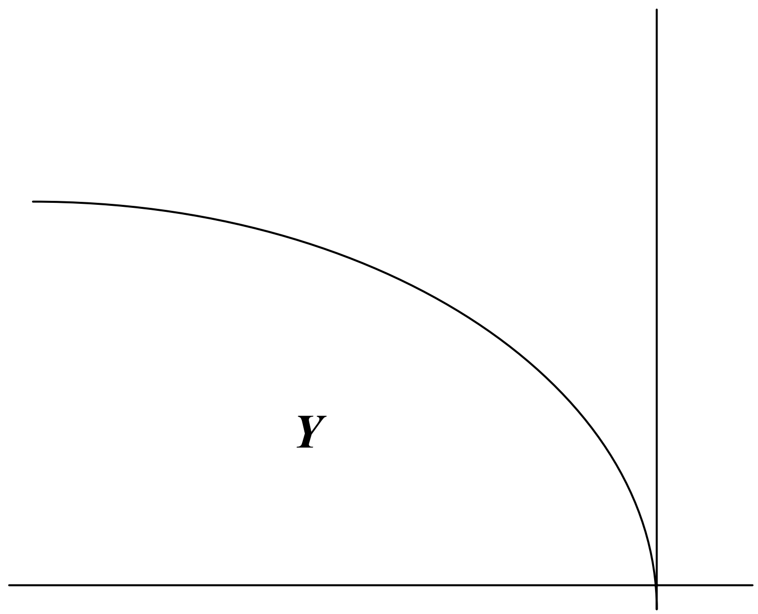
● Concavidad

● Rendimientos a escala

✍ Completar…

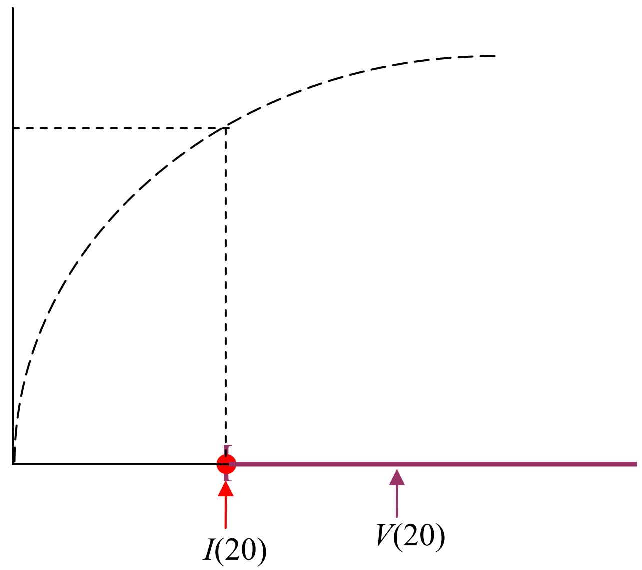
✍ Dada la función de producción $f(x) = x^{1/2}$, encontrar Y, $V(20)$, $I(20)$ (1 punto)

Resolución: $Y = \{(-x, q) \mid q \leq \sqrt{x}\}$



$V(20) = [400, +\infty)$

$I(20) = \{400\}$



Proposición: Dada una función de producción, $q = f(\cdot)$,

(i) la cuasiconcavidad de $f(\cdot)$ significa, en términos económicos, que la *RTSF* es decreciente (mientras que la *PMa* de los factores puede ser decreciente, creciente o constante)

(ii) la concavidad de $f(\cdot)$ implica no sólo que la *RTSF* es decreciente, sino que (también) las *PMa* de los inputs son decrecientes.

Demostración: Sea $q = f(x_1, x_2)$

(i) Cuasiconcavidad $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$ es matriz sdn: $\begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix} \leq 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \geq 0$.

La primera condición se verifica trivialmente. La segunda equivale a

$$f_{11} f_2^2 + f_{22} f_1^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} \leq 0 . \tag{1}$$

Por otra parte, $RTSF_{1,2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1}{f_2}$. Por lo tanto, el decrecimiento de la *RTSF* exige que

$$\frac{dRTSF}{dx_1} = \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{f_2^2}$$

$$= \frac{f_2 (f_{11} dx_1 + f_{12} dx_2) - f_1 (f_{21} dx_1 + f_{22} dx_2)}{f_2^2}$$

$$= \frac{f_2 f_{11} + f_2 f_{12} \frac{dx_2}{dx_1} - f_1 f_{21} - f_1 f_{22} \frac{dx_2}{dx_1}}{f_2^2}$$

$$= \frac{f_2 f_{11} + f_2 f_{12} (-\frac{f_1}{f_2}) - f_1 f_{21} - f_1 f_{22} (-\frac{f_1}{f_2})}{f_2^2}$$

$$= \frac{f_2^2 f_{11} - f_1 f_2 f_{12} - f_1 f_{21} f_2 + f_1^2 f_{22}}{f_2^3}$$

$$= \frac{f_2^2 f_{11} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22}}{f_2^3}$$

Y decrecimiento de *RTSF* exige que $f_2^2 f_{11} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22} \leq 0$, lo cual coincide con (1). Ahora bien, la *PMa* de los factores productivos puede ser decreciente, **constante** o **creciente**.

(ii) Concavidad es una propiedad más restrictiva. Exige que la matriz hessiana $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$ sea sdn. Para ello es preciso que $f_{11} \leq 0$ y $f_{11} f_{22} - f_{12}^2 \geq 0$. Esto último requiere que $f_{22} \leq 0$. Es decir, necesariamente las *PMa* de todos los inputs ha ser **no creciente**.

Rendimientos a escala y **rendimientos (productividad) de los inputs** son conceptos diferentes!

Por ejemplo, es posible que existan rendimientos a escala crecientes y rendimiento marginal decreciente de uno o varios inputs

Ejemplo: La función de producción $q = f(\cdot) = x_1^{0.7} x_2^{0.4}$ presenta rendimientos a escala crecientes $(0.7 + 0.4 > 1)$. Sin embargo, $f_1 = 0.7 x_1^{-0.3} x_2^{0.4}$ y $f_{11} = -0.21 x_1^{-1.3} x_2^{0.4} < 0$; $f_2 = 0.4 x_1^{0.7} x_2^{-0.6}$ y $f_{22} = -0.24\, x_1^{0.7} x_2^{-1.6} < 0$, con lo cual la productividad marginal de los inputs es decreciente.

Más propiedades de los C.P. (de la tecnología): Rendimientos a escala

Miden la cuantía de cambio en q ante una variación de los inputs en una proporción t

● Rendimientos no crecientes a escala: Una tecnología exhibe RNC a escala si:

(i) Si $q \in Y$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces $\lambda q \in Y$, o

(ii) Si $x \in V(q)$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces $\lambda x \in V(q)$, o

(iii) $f(tx) \leq tf(x)$, $\forall t > 1$ (o, alternativamente, $f(tx) = \alpha f(x)$, $\alpha \geq t$)

● Rendimientos no decrecientes a escala:

(i) Si $q \in Y$ y $\lambda \geq 1$, entonces $\lambda q \in Y$, o

(ii) Si $x \in V(q)$ y $\lambda \geq 1$, entonces $\lambda x \in V(q)$, o

(iii) $f(tx) \geq tf(x)$, $\forall t > 1$

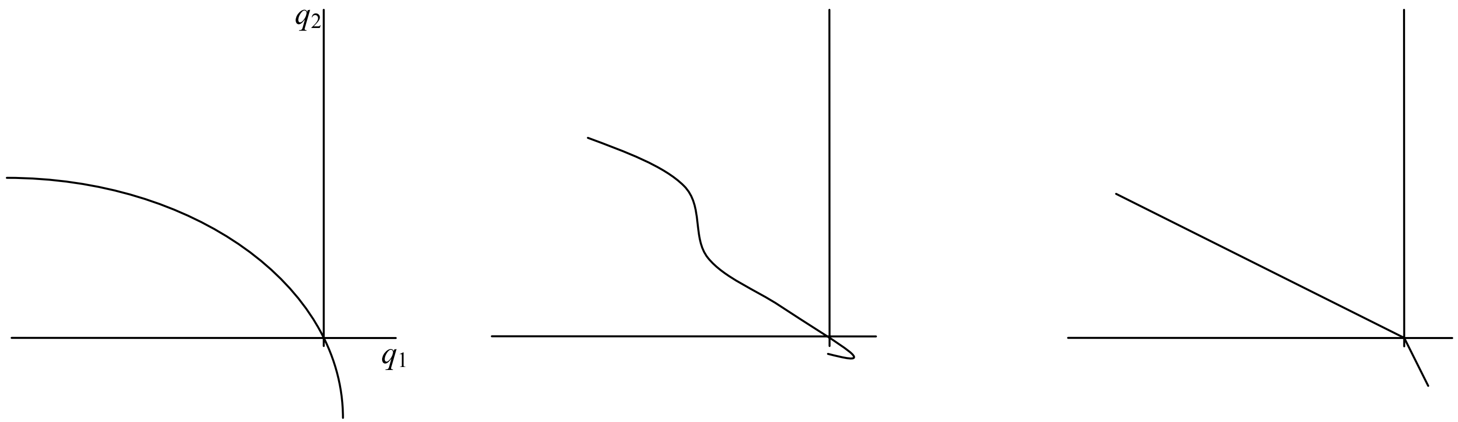
● Rendimientos constantes a escala:

(i) Si $q \in Y$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda q \in Y$, o

(ii) Si $x \in V(q)$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda x \in V(q)$, o

(iii) $f(tx) = tf(x)$, $\forall t \geq 0$

Ilustración gráfica con N=1 y J=1



✍ Sobre la existencia de equilibrio en cada una de las situaciones posibles de rendimientos a escala, resolver el Ejercicio 2.15 (p. 147)

Más propiedades comunes de los C.P.

Aditividad: Si $q, q' \in Y$, entonces $q + q' \in Y$

Relacionado con la entrada libre

Duplicación de empresas

Convexidad: Ya visto

Relacionado con los rendimientos decrecientes

Proposición: Si Y es convexo y $0 \in Y$, entonces Y presenta rendimientos no crecientes a escala

Proof: Sean $q, q' \in Y$ y $\lambda \in [0,1]$. Por convexidad $\lambda q + (1-\lambda)q' \in Y$. Dado que $0 \in Y$, si $q' = 0$, entonces $\lambda q \in Y$. Es decir, $q \in Y$ y $\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda q \in Y$. ■

✍ Dar un ejemplo de Y convexo que no tenga rendimientos no crecientes.

Estamos suponiendo que la tecnología presenta (siempre) un determinado tipo de rendimiento. Podría suceder, sin embargo, que presentase diversos tipos de rendimientos en función de la escala de utilización: Necesitamos definir el concepto a escala local

Para evaluar los rendimientos a nivel local, se utiliza el concepto de **elasticidad de escala** $e(x)$: medida local del incremento porcentual en q debido al incremento del 1% de todos los inputs:

$$\text{Sea } q(t) = f(tx),\ \forall t > 0 \Rightarrow\ e(x) = \left.\frac{\dfrac{dq(t)}{q(t)}}{\dfrac{dt}{t}}\right|_{t=1}$$

y $e(x) > 1$ (=1) (<1) indica rendimientos localmente crecientes (constantes) (decrecientes)

✍ Comprobar que la elasticidad de escala de la función de producción $q = f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ es $e(x) = \alpha + \beta$

✍ Dada la f.p. $q = f(x_1, x_2) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$, calcular:

(i) $e(x)$

(ii) σ

Tipos de funciones de producción

Homotéticas / No homotéticas

Def: Una f.p. f es **homotética** si es una TM de una f.p. h homogénea de grado 1

$$f(x) = g(h(x)), \text{ donde } h(x) \text{ es homogénea de grado 1 y } g(\cdot) \text{ es una TM}$$

◆ La TMST de una f.p. homotética es independiente de la escala de producción (depende sólo de la intensidad relativa (no absoluta) de los inputs) o, lo que es lo mismo,

◆ La TMST de una f.p. homotética es una función homogénea de grado 0

✍ Comprobar para las f.p. $q = f() = \alpha x_1 + \beta x_2$, $q = f() = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$, $q = f() = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

◆ En una f.p. homotética, si *x* y *x'* producen el mismo nivel de output, entonces *tx* y *tx'* también producen el mismo nivel de output

$$x \neq x' \text{ con } f(x) = f(x') \Rightarrow f(tx) = f(tx')$$

✍ Comprobar lo anterior

✍ Poner ejemplos de f.p. homotéticas y verificar en cada una de ellas las propiedades indicadas arriba. Encontrar también ejemplos de f.p. no homotéticas y comprobar que NO las satisfacen

● El problema (primal) de la empresa competitiva

Supongamos que:

(i) Precios de los inputs y del output son fijos (no dependen del comportamiento de la empresa)

(ii) $w = (w_1, \ldots, w_N) >> 0$, $p > 0$; $(w, p) >> 0$

(iii) Su tecnología viene dada por $f(x): R_+^N \to R_+$

Def: El **equilibrio** de la empresa es un vector de cantidades de inputs, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*) \geq 0$, que resuelve el problema

$$\max_x pq - wx, \quad s.a: q \leq f(x) \quad [s.a: x \in V(q)]$$

[NOTA: Si interpretamos q como un vector neput, el programa sería

$$\max_{q} pq, \quad s.a : q \in Y$$

ya que en q ya están implícitos también los inputs (que suponen un gasto para la empresa)]

Problema Primal de la empresa, de Max del beneficio o Programa 1 de la empresa

OJO: Estamos a largo plazo. En el corto plazo, se puede definir el mismo tipo de problema con la/s restricción/es adicional/es de que al menos uno de los factores está fijo.

Primal a corto plazo. Definir…

¿Bajo qué condiciones existe solución para este problema? Ver Antelo (2000), pp. 231-139

CPO: $p\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \leq w_n$, con igualdad si $x_n^* > 0$

Si $f(x)$ presenta rendimientos decrecientes y satisface las **condiciones de Inada** (…), entonces existe una solución interior $x^* >> 0$ en la que $\dfrac{f_n(x^*)}{f_{n'}(x^*)} = \dfrac{w_n}{w_{n'}}, \quad \forall n, n' = 1, \ldots, N; n \neq n'$

CSO: Función de producción localmente cóncava → Hessiano $\begin{vmatrix} pf_{11} & \cdots & pf_{1N} \\ \vdots & & \\ pf_{N1} & & pf_{NN} \end{vmatrix}$ ¿Signo de los menores principales?

Alternativamente, la **CSO** se verifica cuando Y es convexo

Con rendimientos **constantes**, i.e. $f(x)$ lineal, la solución del Primal es $x^* = 0$ o bien $x^* \in [0, +\infty)$; el beneficio que obtiene la empresa es 0

Con rendimientos **crecientes**, el Primal de la empresa no tiene solución (finita), $x^* = +\infty$, y el beneficio de la empresa es $+\infty$

La solución del Primal (cuando existe) se conoce como conjunto de **funciones de demanda de factores**, $x_n^* = x_n(w, p)$, $n = 1, \ldots, N$.

Qué indican?...

Dadas estas f.d.f., la función de valor del Primal (**función de beneficios indirecta**) es

$$
\begin{aligned}
b(w,p) &= \max\{pq - wx \mid f(x) \geq q\} \\
&= p\, q^*(x^*(w,p)) - w\, x^*(w,p) \\
&= b(w,p)
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Calcular $b(w,p)$ para la f.p. $q = f(x) = x^{\alpha}$

Resolución: El Primal consiste en $\max_x px^{\alpha} - wx$. La CPO, $p\alpha x^{\alpha-1} - w = 0$, da lugar a $x^* = x(w,p) = \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ como f.d.f.

CSO: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = p\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} < 0$ (El Hessiano sólo tiene este elemento ya que $N=1$). El cumplimiento de la CSO obliga a que $\alpha < 1$

Por último, f.o.p. se obtiene como

$$q^* = f(x^*(w,p)) = \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

y la f.b.i. es

$$b(w,p) = p\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - w\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \ \blacksquare$$

Proposición: Para todo $(w, p) >> 0$, la función de beneficios indirectos $b(w, p)$ es:

(i) Continua en (w, p)

(ii) No creciente en ***w*** y no decreciente en ***p***

(iii) Homogénea de grado 1 en (w, p)

(iv) Convexa en (w, p)

Verificar el cumplimiento de estas propiedades en la f.b.i. calculada anteriormente.

Conjunto de producción en el corto plazo

Algunos factores son fijos. Supongamos que $x_2 = k$. El Conjunto de Producción de corto plazo, $Y(k)$, es

$$Y(k) = \{q \in Y \mid q \text{ son planes de producción viables restringidos a } x_2 = k\}$$

Ejemplo (con $N = 2$): $Y(k) = \{(-x_1, -x_2, q) \mid q \leq x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}; x_2 = k\}$

$$= \{(-x_1, q) \mid q \leq x_1^{\alpha} k^{1-\alpha}\}$$

La función de beneficios indirecta a corto plazo será, pues,

$$b(w, p) = \max\, pq - wx, \quad s.a : q \in Y(k)$$

✍ Ver Antelo (2000) para una generalización de estos resultados al caso en el que existen L factores fijos, $1 < L \leq N$

Dada la f.p. $f(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$, obtener:

(i) La función de beneficios de largo plazo

(ii) La función de beneficios de corto plazo si $x_2 = e$

Utilización más importante de $b(w, p)$:

Proposición (Lema de Hotelling). Si $b(w, p)$ es diferenciable, las f.d.f. y la f.o.p. se obtienen como $x_n(w, p) = -\dfrac{\partial b(w, p)}{\partial w_n}$, $n = 1, \ldots, N$, y $q(w, p) = \dfrac{\partial b(w, p)}{\partial p}$

Proposición: (Principio Le-Châtelier-Samuelson)

(i) La f.o.p. a corto plazo de una empresa es **más rígida** que la de largo plazo (y es tanto más rígida cuanto mayor sea el número de inputs fijos)

(ii) El beneficio a corto plazo es **no mayor** que el beneficio a largo plazo

Demostración. Ver Antelo (2000).

Dada la f.p. $q = f(x) = 10x - x^2$, con $w > 0$ y $p > 0$, obtener la f.d.f. ¿Puede ser de esquina el equilibrio? Especificar cuando es de esquina y cuando es interior. Calcular $b(w, p)$

● Minimización de los costes (Función de costes)

Mismos supuestos que en el Primal (Ver arriba)

Instrumento principal para describir las posibilidades económicas de la empresa. Mide el **coste mínimo** de obtener un determinado nivel de producción q, dados los precios w de los factores

Si la empresa **maximiza** su beneficio, produciendo q, con la cantidad x de inputs (Ver Primal)

$\Rightarrow$ Produciendo q no es posible gastar menos que $w\,x$

$\Rightarrow$ Maximizar el beneficio es equivalente a minimizar el coste

Def: Un **equilibrio** de la empresa es (también) un vector de cantidades de factores, $x^c = (x_1^c, ..., x_N^c)$, tal que, dados ($w$,$q$), resuelve el problema

$$\min_x wx,\ s.a: f(x) \geq q\ \ [\text{o}\ s.a: x \in V(q)]$$

Problema Dual de la empresa, de Minimización de costes o Programa 2

Si $V(q)$ es cerrado y no vacío (volver a ver las propiedades de $V(q)$), el problema Dual tiene una solución

Solución: **Funciones de demanda condicionada de factores**, $x_n^c = x_n^c(w,q)$, $n = 1,...,N$

Interpretación económica: …

CPO: Si $q = f(x)$ es diferenciable, el conjunto $x^c(w,q)$ es el óptimo (solución del Dual) si existe $\mu \geq 0$ tal que $w_n \geq \mu \dfrac{\partial f(x^c)}{\partial x_n}$ (con igualdad cuando $x_n^c > 0$)

Resolviendo el sistema de CPO llegamos a la caracterización del equilibrio como

$$\frac{f_n(\cdot)}{f_{n'}(\cdot)} = \frac{w_n}{w_{n'}}$$

Interpretar económicamente…

Misma caracterización que a través del Primal!

💣 OJO: Si la función de producción es **cóncava** (lo cual es cierto si *Y* es convexo), el Dual tiene -al igual que el Primal- solución única

CSO: Se cumplen si la función de producción es cuasicóncava, i.e., si la RTSF es decreciente (ver ejercicio resuelto más arriba)

🚨 CUIDADO: A diferencia del Primal, el problema Dual puede tener solución aun cuando la función de producción exhiba rendimientos **constantes** o **crecientes** a escala

✍ Poner un ejemplo y resolver el Dual

La solución del Dual se conoce como conjunto de f.d.c.f., $x_n^{\bullet} = x_n^c(w,q)$

$$x_n^c(w,q) = \arg\min_x wx, \quad s.a : x \in V(q)$$

¿Significado de las f.d.c.f.?

Inobservables

Función de valor del Dual: **Función de costes** de la empresa

$$c(w,q) = wx^c(w,q) = \{\min wx \mid x \in V(q)\}$$

Proposición. Propiedades de la función de costes $c(w,q)$

(1) Considerando q dado, la función de costes de la empresa $c(w)$ es:

(i) No decreciente en w

(ii) Homogénea de grado 1 en w

(iii) Cóncava en w

(2) Suponiendo fijo w, $c(q)$ es

(iv) No decreciente en q

✍ Determinar la función de costes correspondiente a las funciones de producción

(i) $f(x_1,x_2) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho < 1$

(ii) $f(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2$

(iii) $f(x_1,x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$.

Proposición. Dado w, el multiplicador de Lagrange del Dual, μ, representa el coste marginal de la producción, $\mu = \frac{\partial c(w,q)}{\partial q}$

Demostración. Aplicar el teorema de la envolvente.

Proposición (Propiedades de $x_n^c(w,q)$)

(i) Homogéneas de grado 0 en w

(ii) Si $V(q)$ es convexo, entonces $x_n^c(w,q)$ es convexo

(iii) **Lema de Shephard**: Si $c(w,q)$ es diferenciable, entonces

$$\frac{\partial c(w,q)}{\partial w_n} = x_n^c(w,q),\ n = 1,\dots,N$$

(iv) $x^c(w,q)$ diferenciable $\Rightarrow$ $Dx^c(w,q) = D^2c(w,q)$ es una matriz simétrica, sdn y verifica $Dx^c(w,q)\, w = 0$

● Geometría de los costes

Costes fijos / Costes variables

Costes medios / Costes marginales

Costes a corto plazo / costes a largo plazo (Envolvente)…

COMPLETAR TODO ESTO

Ejemplo:

Dada la función de producción $q = f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2$, la demanda de factores a corto plazo, si $x_2 = k$, es $x_1^c = \left(\frac{q}{k}\right)^2$ y $x_2^c = k$. Entonces, la función de costes a corto plazo es $\widetilde{c}(w, q; k) = w_1 \frac{1}{k^2} q^2 + w_2 k$

OJO: CF y CV

A partir de aquí calcular los *CMe* y *CMa* a corto plazo

A largo plazo, es fácil ver que $x_1^c = x_2^c = q^{2/3}$. Por lo tanto, la función de costes a largo plazo es

$$c(w,q) = (w_1 + w_2)q^{2/3}.$$

✍ Comprobar que la función de costes a largo es no menor que la función de costes a corto (Envolvente…)

✍ Definir, relacionar y representar gráficamente todos los conceptos anteriores … con rendimientos decrecientes, constantes, crecientes,…

● Oferta de la empresa

Combinando los dos programas P.1 y P.2, podemos reformular el problema de maximización de beneficios de la empresa

$$\max_{x} pq - wx, \; s.a: f(x) \le q$$

como

$$\max_{x} pq - c(w, q)$$

una vez que hemos incorporado en P.1 la solución del P.2

Proposición: La solución de este problema (P. 1,5) determina la función de oferta (óptima) de la empresa

✍ Determinar la CPO y la CSO. Representar gráficamente

● Dualidad

Idea: El problema de Max del beneficio es equivalente al problema de Min del coste

⇒ Existe una estrecha relación entre la función de producción y la función de coste: Para una función de producción se puede encontrar la función de costes correspondiente y viceversa.

Cómo obtener la tecnología asociada a una función de costes? Mirar Antelo (2000)

Dualidad:

Función de producción	**Función de costes**
$q = ax_1 + bx_2$	$c(w,q) = \min\left\{\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{a}\right\} q$
$q = \min\{ax_1, bx_2\}$	$c(w,q) = \left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{a}\right) q$
$q = x_1^a + bx_2^{1-a}$	$c(w,q) = k(a) w_1^a w_2^{1-a}$
$q = (x_1^\rho + bx_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$	$c(w,q) = (w_1^\alpha w_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} q, \quad \alpha = \frac{\rho}{\rho - 1}$

Además, la dualidad se concreta en que:

- Si $q = f(x)$ homogénea de grado 1 $\Rightarrow$ $x_n^c(w,q)$ y $c(w,q)$ homogéneas de grado 1 en q

■ Si $q = f(x)$ cóncava $\Rightarrow c(w,q)$ convexa en q

✍ Comprobar que, para las funciones de producción indicadas en la tabla, las funciones de coste correspondientes son las reseñadas

● Agregación

Una vez determinada la función de oferta de la empresa → Función de oferta agregada

Def: (Función de oferta agregada). Suponiendo que en el mercado existen E empresas, $e = 1,\ldots,E,$ cada una de ellas con la función de oferta de producto $q_e(p)$, la Oferta Agregada se define como

$$Q(p) = \sum_{e=1}^{E} q_e(p)$$

$$= \left\{ Q \in R^{N+1} \middle| Q = \sum_{e=1}^{E} q_e(p) \text{ para algún } q_e \in q_e(p), e = 1,\dots,E \right\}$$

Todas las propiedades de $q_e(p)$ se trasladan a $Q(p)$. En particular, la ley de la oferta

Conjunto de producción agregado: $\Theta = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_E$. (Volver a ver aditividad)