Capítulo 5. LA ELECCIÓN EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

Seguiremos: Antelo (2000), Cap. 5 + Antelo (2003), Cap. 5

1. Definiciones

2. Criterio de elección bajo incertidumbre

3. Comportamiento de los individuos frente al riesgo

4. Aplicaciones:

4.1. Asegurarse contra la incertidumbre: Demanda de seguros

4.2. Diversificación de las inversiones

4.3. Valoración de los activos de capital

4.4. Comportamiento del consumidor bajo incertidumbre: consumo inter-temporal y ahorro precautorio

4.5. Comportamiento de la empresa (Cap. 2) bajo incertidumbre de precios

1. Objetivo y definiciones

De certidumbre pasamos a **incertidumbre**: situaciones en las que la elección del agente depende de circunstancias que escapan a su control

★ Incertidumbre vs Riesgo

• **Riesgo:** Una situación en la que pueden producirse varios resultados (y lo más que puede hacer el agente es asignar **probabilidades** de ocurrencia a cada uno de ellos)

Objetivas: las que se basan en experimentos iguales a la situación en la que estamos y que han sido realizados en el pasado (lanzamiento de una moneda al aire: *c* (0,5); + (0,5)

Subjetivas: las basadas en la realización de experimentos similares, pero no idénticos (probabilidad de que un equipo gane)

Exógenas: las probabilidades de eventos sobre las que el individuo no puede influir (probabilidad de que llueva) (cambio climático?)

Endógenas: el agente con su comportamiento puede afectar la probabilidad (probabilidad de contraer la gripe)

• Si las probabilidades de ocurrencia son **exógenas**, la situación es de **incertidumbre**

NO siempre haremos tal distinción

Un ejemplo:

Un individuo desea configurar una cartera de inversión, para lo cual puede adquirir:

→ Un bono de cupón cero con un rendimiento del 10% (lo compra por el 90% de su valor y recibirá a su vencimiento el 100% del valor)

→ Un activo financiero (incierto) que hoy vale 20€ y en el futuro valdrá 30€ (si la economía va bien) o 10€ (si va mal)

◆ Problema: ¿cómo diseñar la cartera de valores (portfolio)?

Si supiese que la economía irá bien, comprará el activo incierto (ya que la rentabilidad será del 50%); si cree que irá mal, invertirá en el activo cierto.

Como el individuo no conoce la realización de la incertidumbre, el problema sigue siendo: ¿cómo invertir?... La teoría de la elección en incertidumbre ofrece criterios para tomar decisiones como ésta.

A los eventos sobre los que el agente no tiene control se les llama **estados de la naturaleza** (lluvia o sequía, terremoto o no-terremoto, estar sano o caer enfermo, que un negocio vaya bien o mal…)

Estado de la naturaleza: Descripción de un determinado resultado de la incertidumbre.

El conjunto de todos los estados posibles (que supondremos finito) es

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$$

Si la probabilidad de ocurrencia del estado n es γ_n, entonces:

$$\gamma_n \geq 0, \text{ para todo } n, \text{ y } \sum_{n=1}^{N} \gamma_n = 1$$

En incertidumbre, los agentes eligen planes de consumo contingentes (PCC) (juegos o loterías)

PCC: Especificación del # de unidades a consumir en cada estado de la naturaleza

Alternativamente, un PCC se puede entender como una v.a. que toma un determinado valor (realización) con una determinada probabilidad, i.e. como una lotería

$$l \equiv \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_N; \gamma_1, \ldots, \gamma_N)$$

Una lotería se define con dos vectores, el vector de los premios y el de las probabilidades

Una vez que tenemos un criterio de elección, el individuo puede elegir el plan de consumo contingente o lotería que resuelva el citado criterio

Plan de consumo cierto: Aquél en el que el nº de unidades de consumo es el mismo en los diferentes estados de la naturaleza

En este caso, no existe incertidumbre (Capítulos anteriores)

Hemos visto una primera idea de cómo representar preferencias en contextos de incertidumbre. Bajo determinados supuestos sobre la ordenación de las preferencias, la utilidad esperada es una forma razonable de representar esas preferencias (Ver Antelo (2000), pp. 298-306)

Consideremos una lotería $\tilde{x} = (x_1,...,x_N; \gamma_1,...,\gamma_N)$. Si se gana uno de estos eventos o premios, entonces $\sum_{n=1}^{N} \gamma_n = 1$.

Valor esperado (de un juego o lotería)**:** El valor esperado (VE) es:

• Para una situación con resultados discretos (loterías discretas)

$$E(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n x_n$$

• Si la situación analizada tiene resultados continuos y la probabilidad de que el resultado de la v.a. x esté en un intervalo muy pequeño, dx, es $f(x)dx$, siendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$, entonces el VE es

$$E\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$$

El rendimiento esperado es el resultado de una situación incierta, obtenido como la suma ponderada de los valores asociados a cada una de las posibles situaciones, y siendo la ponderación la probabilidad de ocurrencia de esa situación

Juego (actuarialmente) Justo (J.A.J.): Aquella situación incierta que genera un valor esperado igual a cero, $E(\tilde{x}) = 0$

2. Criterio de elección en incertidumbre

2.1 Valor esperado (Criterio *E*)

Elegir la situación incierta (o lotería) cuyo valor esperado sea el máximo

$$\max E(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n x_n$$

☆ Ventaja: Simple

☆ Problema: Puede ser inconsistente con la evidencia empírica

(i) Un problema de inversión

Un individuo monta un negocio que requiere de 10000€ de inversión. Supongamos sólo dos estados: con probabilidad 0,5, la empresa fracasa (ingreso nulo) (estado malo); con probabilidad 0,5, es exitosa (rinde beneficio de 20000€) (estado bueno)

Consideremos dos loterías: El individuo puede invertir solo (juego A) o bien compartir la inversión con 9 socios más (juego B).

Qué debería elegir el individuo? Qué sugiere la evidencia empírica?

En el juego A, resulta $E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}(0-10000) + \frac{1}{2}(30000-10000) = 5000€$

En el juego B, $E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}(0-1000) + \frac{1}{2}(3000-1000) = 500€$

El criterio del VE prescribe hacer A. Sin embargo, la mayoría de la gente optaría por B (!)

Discrepancia!!

(ii) Dos loterías

$\tilde{x} = (100;1)$ $\tilde{z} = \left(2,200;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Entonces $E[\tilde{x}] = 100$ y $E[\tilde{z}] = 101$. Pero, la mayoría de la gente elegiría la 1ª!

(iii) Paradoja de San Petersburgo

Idea: una v.a. cuyo valor es, con una probabilidad alta, muy bajo, pero cuyo valor esperado es infinito.

Juego: Se lanza una moneda no trucada al aire hasta que salga *c*. Si sale *c* por primera vez en la *n*-ésima tirada, el jugador gana 2^n €

Cuánto estaría dispuesto un individuo a pagar por poder jugar este juego?

<u>Respuesta:</u>

Calculemos el VE de este juego: La probabilidad de que salga *c* por **primera** vez en la *n*-esima tirada es (*c* no debió de aparecer en las *n*-1 tiradas anteriores)

$$\gamma_n = \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times}_{n-1\text{ veces}}\ldots\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Por lo tanto,

$$E(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Frente a esta lotería, el criterio del VE prescribe que un individuo debería estar dispuesto a pagar una cantidad infinita por participar en ella (en consonancia con el valor infinito del VE).

Pero esto no concuerda con la intuición (evidencia empírica). Nadie pagaría, p.ej., 10 millones de € por jugar este juego (a pesar de que esa cantidad es muy inferior al VE del juego).

Explicación: En una situación de riesgo, lo importante es el valor "moral" de los premios (la "utilidad de los premios"), y no los premios en sí. El valor de la riqueza que genera un determinado juego no se mide por la cantidad esperada de riqueza, sino por la utilidad que dicha riqueza esperada le produce al individuo (y en dicha utilidad esperada entra también la varianza!)

Solución de Bernoulli a la paradoja: La pérdida de una cantidad de dinero x implica una variación en la utilidad que, en valor absoluto, es mayor que la variación debida a la ganancia de la misma cantidad, $u(w)-u(w-x)>u(w+x)-u(w)$

Esto equivale a suponer que el participante en esta lotería actúa como max del VE de una función cóncava de los premios (la utilidad de los premios), y no del VE en sí

$\Rightarrow$ La conjetura de Bernoulli fue que la función (utilidad de cada premio en la paradoja de S. P.) correspondiente es $u(x_n) = \ln x_n$ $(u' > 0,\ u'' < 0)$, con lo cual el valor de la utilidad esperada de este juego converge hacia un número finito

$$Eu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} n \ln 2 = 2 \ \ln 2 = 1{,}39$$

La conjetura de Bernoulli fue aceptada y luego olvidada hasta que Knight (en los años 1920) y el desarrollo de la tª matemática de los juegos (década de 1940) la revitalizaron. De hecho, John von Neuman y Oskar Morgenstern (Theory of Games and Economic Behavior, 1944) demostraron formalmente la conjetura. El th de vNM asegura que las preferencias entre loterías se deben medir por el VE de la utilidad de los premios (por eso, se llama tª de la utilidad esperada).

(iv) Otro ejemplo de paradoja

A un individuo se le pregunta si participa o no en el siguiente juego: “En una urna se introducen g tickets de una rifa. Si el individuo compra x tickets, $0 < x \leq g$, cada uno al precio de 1€, también se introducen en la urna. Si uno de los tickets comprados es extraído, el individuo gana un premio de v€ más el coste de las x rifas, $v > g$.”

Qué debería hacer el individuo?

<u>Resolución:</u>

La probabilidad de que uno de los tickets comprados salga elegido es $\gamma = \frac{x}{g+x}$, con lo cual el valor esperado del juego es

$$E\tilde{x} = \gamma(v + x - x) + (1-\gamma)(0 - x)$$

$$= \frac{x}{g+x}(v + x - x) + \left(1 - \frac{x}{g+x}\right)(0 - x)$$

$$= \frac{v+x}{g+x}x - x > 0, \text{ ya que } g < v.$$

Es decir, para todo $x > 0$:

- El valor esperado es $E\tilde{x} = x\left(\frac{v+x}{g+x} - 1\right) > 0$.

- Además, $\frac{\partial E\tilde{x}}{\partial x} > 0$: $E\tilde{x}$ se hace máximo cuando $x \to \infty$ ($E\tilde{x}$ es infinitamente grande para x grande)

Si el individuo toma decisiones basándose en el criterio del VE, estaría dispuesto a pagar una cantidad infinita en comprar un número infinitamente grande de tickets de la lotería. Otra vez, esto es contraintuitivo (!)

2.2 Criterio media-varianza (E-V)

Se han propuesto mejoras del criterio *E*. La más popular (en finanzas) es la de H. Markowitz. Consiste en añadir a la *E* la varianza de los resultados posibles (riesgo de cada lotería), $\sigma_{\tilde{x}}^2 = E[\tilde{x} - E\tilde{x}]^2$. **Criterio media-varianza (E-V)**

Caso (ii) anterior: $\sigma_{\tilde{x}}^2 = E[\tilde{x} - E\tilde{x}]^2 = 0$,

$\sigma_{\tilde{z}}^2 = E[\tilde{z} - E\tilde{z}]^2 = \frac{1}{2}(2-101)^2 + \frac{1}{2}(200-101)^2 = 9801$. La 2ª lotería conlleva + riesgo

Según el criterio E-V, cada lotería se evaluará en función de un valor definido por

$$E[\tilde{x}] - k\sigma_{\tilde{x}}^2, \qquad (1)$$

donde k es una cte asociada a cada individuo

IDEA: k es la TMS entre la E y la Var en la evaluación de las loterías. Derivando, y manteniendo cte el valor de la función de evaluación (1),

$$dE[\tilde{x}] - k d\sigma_{\tilde{x}}^{2} = 0 \quad \Rightarrow k = \frac{dE}{dVar}$$

en cuanto tiene que variar E para compensar un cambio de la Var y mantener cte la valoración de la lotería

- $k = 0$: Al variar *Var* (el riesgo), la *E* no tiene que ser adaptada para mantener cte la valoración de la lotería $\Rightarrow$ Caemos en el criterio *E*. Individuo <u>neutral al riesgo</u> (en su valoración de las loterías, no da importancia a la *Var*). Un agente neutral al riesgo no se preocupa del riesgo

- $k > 0$: … Individuo averso al riesgo

- $k < 0$: …

Volvamos al ejemplo anterior: Si los individuos prefieren $\tilde{x}$ a $\tilde{z}$, entonces $100-k\cdot 0>101-k\cdot 9801$,

de donde $k>\frac{1}{9801}\equiv k_1$.

☒ Todos los individuos que prefieren $\tilde{x}$ a $\tilde{z}$ tienen un coeficiente $k>k_1$. Son <u>aversos</u> al riesgo.

☒ El resto de individuos tienen una $k<k_1$, en cuyo caso se incluyen los (moderadamente) aversos al riesgo, los neutrales al riesgo y los amantes del riesgo.

Entonces, ¿cuál es el criterio idóneo para la toma de decisiones?

2.3 Criterio de la utilidad esperada (Savage, Finetti, von Neuman-Morgenstern)

Idea: Los individuos no se preocupan de los resultados de la lotería, sino que los transforman a otra escala: la utilidad de los resultados

Función de utilidad esperada (o función vNM): Una función que asigna una medida numérica de la utilidad a cada estado, y define los resultados en función de la utilidad final a la que corresponden

$$Eu(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \, u(x_n)$$

Si la situación analizada tiene resultados continuos (por ejemplo, un cálculo muy exhaustivo de la variación en el precio de una acción), tenemos distribuciones de probabilidad continuas. Si $f(x)$ es una función de densidad definida con respecto a los resultados x, la utilidad esperada de este juego es

$$Eu(x) = \int u(x) f(x) dx$$

Teorema de la utilidad esperada o de vNM: Existencia de la función vNM (John von Neuman y Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, 1944)

Supuesto inicial: Es necesario suponer que el individuo es capaz de ordenar los premios según una $\succeq$ que, como mínimo, es **Completa** y **Transitiva**. Entonces, existe una relación $\succeq$ transitiva tal que para dos premios x_i, x_j, $x_i \succeq x_j$ o $x_j \succeq x_i$ o ambas a la vez. Bajo este supuesto, existe (ver Cap. 1) una función de utilidad para los premios, $u(x)$, tal que $u(x_i) \geq u(x_j)$ sii $x_i \succeq x_j$

Objetivo: Encontrar una función para la utilidad de las loterías (el espacio de loterías es £) que represente estas preferencias

Para encontrar la f.u. de los premios, $u(x)$, necesitamos el siguiente axioma:

☆ Dominancia estocástica de primer orden (DEPO):

Ordenemos los premios de mejor a peor $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_n$ (i.e. $x_i \succ x_j$ si $i<j$). Si $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i^h \geq \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^k$, $\forall m = 1,...,n-1$ (con > para al menos un valor de m), entonces $l^h \equiv (x;\gamma^h) \succ (x;\gamma^k) \equiv l^k$

Las loterías cuya probabilidad es mayor sobre los premios más preferidos son loterías más preferidas. La DEPO es lo equivalente en modelos estocásticos a las preferencias monótonas

Caso particular: loterías con sólo dos premios $\rightarrow$ Es cierto lo anterior y también la afirmación en sentido contrario (si una lotería es mejor que otra, la más preferida debe tener mayor probabilidad en el mejor premio).

A partir de aquí, podemos asociar a cada premio un nº tal que (si las preferencias definidas en el espacio de loterías, £, satisfacen determinados axiomas, entonces)

(i) Existe una función de utilidad vNM u:£$\rightarrow\mathbb{R}$, que representa dichas preferencias y satisface la propiedad de la utilidad esperada

(ii) Esta función es única, salvo para transformaciones afines o lineales de la misma

Demostración: Ver Antelo (2000), pp. 302 y ss.

Si los individuos verifican los axiomas de vNM sobre el comportamiento en situaciones de incertidumbre, actuarán **como si** eligieran la opción que maximiza el valor esperado de su índice de utilidad vNM

★ Dos propiedades básicas de la función vNM:

• Consumo y **riqueza** se identifican, por lo que la utilidad se puede expresar en función de la riqueza obtenida en cada estado (y ello porque aunque la riqueza no genera utilidad, suponemos que se traduce en consumo de bienes): $u = u(w)$ Función es creciente

• **Aditiva** en la utilidad que el individuo deriva de cada estado (suma ponderada de una función de consumo en cada estado; ponderaciones = probabilidades)

$$Eu(l) = Eu(w_1,...,w_n;\gamma_1,...,\gamma_n) = \gamma_1 u(w_1) + ... + \gamma_n u(w_n)$$

Cuando decimos que la función de utilidad tiene la propiedad de la utilidad esperada (PUE), queremos decir que podemos elegir una función de utilidad que tenga esta forma aditiva

OJO:

Si las preferencias del consumidor se representan mediante $u(w) = \gamma \ln w_1 + (1-\gamma)\ln w_2$, también se describirán por $u(w) = w_1^{\gamma} w_2^{1-\gamma}$ (Hemos aplicado una TM). Pero esta última no tiene la PUE mientras que la primera sí. (Si hubiésemos aplicado una TA, sí se mantendría la PUE)

Si tenemos una FUE y queremos que una transformación siga manteniendo la PUE, tenemos que limitarnos a las transformaciones afines o lineales (un caso particular de TM)

IMPORTANTE: Dada una FUE, una TM representa las mismas preferencias pero no mantiene (destruye) la PUE; una TA representa las mismas preferencias y además preserva la PUE

Resultado: La FUE es única salvo para transformaciones afines (lineales) de la misma

OJO: Comparar con el resultado en certidumbre!! Cap. 1

Entonces, si $u(w)$ es una FUE, también lo es cualquier otra función del tipo

$$v(w) = \alpha + \beta u(w),\ \beta > 0$$

♦ Ejemplos (**Supongamos sólo dos estados de la naturaleza):**

1. Sustitutivos perfectos: $u(w) = \gamma u(w_1) + (1-\gamma)u(w_2) = \gamma w_1 + (1-\gamma)w_2$

Dado que $u(w_n) = w_n$, con esta FUE caemos en el valor esperado (nivel promedio de consumo)

2. Cobb-Douglas (expresada en logaritmos): $u(w) = \gamma u(w_1) + (1-\gamma)u(w_2) = \gamma \ln w_1 + (1-\gamma)\ln w_2$

donde $u(w_n) = \ln w_n$

✍ Ejercicio: De las siguientes funciones de utilidad

1. $u(w_1, w_2) = \beta(\gamma w_1 + (1-\gamma)w_2)$;

2. $u(w_1, w_2) = \gamma w_1^2 + (1-\gamma)w_2$;

3. $u(w_1, w_2) = \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln w_1 + w_2$;

4. $u(w_1, w_2) = \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln w_1 + \ln w_2$

Cuáles tienen la PUE?

Resolución:

1. Dado que es una TA de la función $z() = p_1 w_1 + p_2 w_2$, en la que $z(w_n) = w_n$ (en efecto, se multiplica $z()$ por una constante y se le suma otra constante que en este caso es cero) y $z()$ verifica la PUE, la función $u()$ también preserva la PUE.
2. No; 3. No; 4. Sí

✍ Discutir el contenido ordinal de la función de utilidad en contextos de certidumbre frente al contenido cardinal de la FUE

◆ Consideremos un individuo cuya riqueza inicial es w_0 y que se enfrenta a la situación incierta $\tilde{x} = (x_1,...,x_N; \gamma_1,...,\gamma_N)$.

• Bajo los dos supuestos anteriores, este agente aceptará participar en este juego si

$$Eu(w_0 + \tilde{x}) > u(E(w_0 + \tilde{x})) \equiv u(w_0 + \tilde{x})$$

i.e. si

$$\gamma_1 u(w_0 + x_1) + ... + \gamma_N u(w_0 + x_N) > u(\gamma_1 (w_0 + x_1) + .. + \gamma_n (w_0 + x_n))$$

• Le resultará indiferente participar o no si … = …

• Rehusará participar si …<…

En cualquier caso, el programa a resolver por el individuo para tomar decisiones es

$$\max E[u(w)]$$

■ **Con el criterio *E-U* se resuelve la Paradoja de San Petersburgo!**

Sup. que, para la toma de decisiones, consideramos el criterio *E-U*; no el *E*. Concuerda esto con la evidencia empírica? Sí

• Sup, en la Paradoja de San Petersburgo, que el valor del resultado 2^n para el jugador **no** es realmente 2^n sino $u(2^n)$. Entonces la utilidad esperada de esta situación incierta es

$$Eu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(2^n)$$

• Sup. además que $u'(\cdot) > 0$ y $u''(\cdot) < 0$. (Por ejemplo, que $u(2^n) = \ln 2^n$). Entonces

$$Eu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} n \ln 2 = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} n = 2 \ln 2 = 1{,}39$$

que es un valor finito (y más bien pequeño)

■ También podemos resolver la segunda paradoja utilizando la *E-U* en lugar del *E*

$$Eu = \gamma\, u(v + x - x) + (1 - \gamma)\, u(0 - x)$$

$$= \frac{x}{g + x} u(v + x - x) + \frac{g}{g + x} u(0 - x)$$

que **no** es infinitamente elevado cuando x es suficientemente grande (como sucedía con el criterio E)

★ Aspectos importantes del criterio *E-U*

Equivalente cierto. Consideremos un individuo cuya riqueza inicial es w_0 y que se enfrenta a una lotería $\tilde{x}$.

☆ Cuál es la riqueza que (recibida con certeza) da al individuo la misma utilidad que w_0 más la lotería $\tilde{x}$? Es w^* que resuelve

$$u(w^*) = E[u(w_0 + \tilde{x})] \equiv E[u(\tilde{w}_f)]$$

◇ **Ejemplo:** Un individuo con preferencias $u(w) = \ln w$, $w_0 = 100$, $\tilde{x} = \left(50,-50;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$$E[u(\tilde{w}_f)] = E[u(w_0 + \tilde{x})] = \frac{1}{2}\ln 150 + \frac{1}{2}\ln 50 = 4{,}46 \;\Rightarrow\; u(w^*) = \ln w^* = 4{,}46 \Rightarrow w^* = 86{,}48$$

Este individuo está indiferente entre recibir 86,48€ con certeza o 100€ más la lotería $\tilde{x}$ indicada

Precio de venta (de una lotería): Cantidad exigida por el individuo para rechazar participar en la lotería, $pv(w_0, \tilde{x}) = w^* - w_0$

Puede ser negativo o positivo

- Si $pv(w_0, \tilde{x}) < 0$, es la cantidad que el individuo está dispuesto a **dar** para desprenderse (vender) de la lotería. (En el ej. anterior, $pv = -13{,}51$, i.e. está dispuesto a dar 13,51€ a un 3º con tal de que éste asuma, en su lugar, la responsabilidad de la lotería $\tilde{x} = \left(50, -50; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; por lo tanto, si todos los compradores potenciales piden menos (más) de 13,51€, nuestro individuo estará (no estará) dispuesto a vender la lotería.)

- Si $pv(w_0, \tilde{x}) > 0$, es la cantidad que el individuo está dispuesto a **aceptar** para vender la lotería a un 3º. (En el ej. anterior, si $\tilde{x} = \left(50, -50; \frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right)$, el precio de venta es positivo! **Calcular**)

Problema del $pv(w_0, \tilde{x})$: Para un individuo averso al riesgo (como el de la f.u. ln), basta con cambiar los datos de la lotería en la que está inmerso el individuo para obtener un *pv* positivo o uno negativo $\Rightarrow$ No existe una relación clara entre actitud del individuo y signo del *pv*

♦ Como resolver esta vaguedad? Con el concepto de **prima** o **coste del riesgo** (o premio por el riesgo)

Prima de riesgo, Δ: Para una lotería $\tilde{x}$ cuyo $pv(w_0,\tilde{x})$ ha sido calculado, la prima de riesgo es

$$\Delta(w_0,\tilde{x}) = E[\tilde{x}] - pv(w_0,\tilde{x})$$

Es fácil comprobar que en los dos casos anteriores $\Delta > 0$ (en el 1º caso, $\Delta = 13{,}51$; en el 2º, $\Delta > 0$ también. **CALCULAR**)

Resultado: Si un individuo es averso al riesgo, $\Delta > 0$. Si es neutral, $\Delta = 0$. Si es amante, $\Delta < 0$

Diferencia entre *pv* y Δ: El *pv* está influenciado tanto por la actitud ante el riesgo como por la naturaleza de la lotería; la Δ sólo depende de (está totalmente determinada por) la actitud frente al riesgo (la curvatura de la f.u.)

✍ Dadas las ss. F.U.E.

Exponencial (negativa): $u(w) = -e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$

(El signo negativo no tiene importancia: la utilidad puede tomar cualquier valor!), calcular el equivalente cierto, el precio de venta y la prima de riesgo si $w_0 = 100$, $\alpha = 0{,}01$, $\tilde{x} = \left(-1{,}4{,}10; \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Lo mismo para la función de utilidad

Cuadrática: $u(w) = \alpha w - \beta w^2, \quad \alpha, \beta > 0$

(Dar un valor numérico al parámetro β)

✍ Ver más ejemplos en Antelo (2003), Cap. 5, Ejercicios #5.4, #5.6, #5.9 y #5.10

3. Comportamiento del individuo ante el riesgo

Dos alternativas ante una situación de incertidumbre:

- Participar en la situación incierta → $Eu(w)$
- No participar en la situación incierta → $u(Ew)$

El individuo presenta:

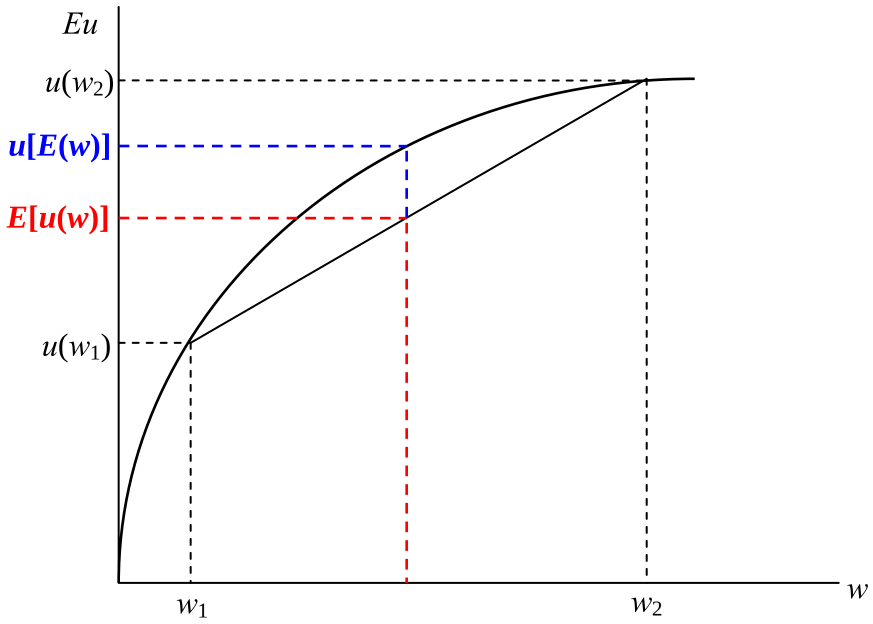
1. Aversión al riesgo

Consideremos, para simplificar, una lotería con sólo dos resultados posibles: con prob γ_1 la riqueza del individuo será w_1; con prob $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$ será w_2. El individuo es averso al riesgo si

$$
\begin{aligned}
u[E(w)] &= u(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2) \\
&> \gamma_1 u(w_1) + \gamma_2 u(w_2) = E[u(w)]
\end{aligned}
$$

El individuo prefiere recibir, con certeza, el valor esperado del juego antes que participar en el juego que tiene exactamente ese valor, pero en términos esperados (i.e., con varianza)

Tenemos, pues, una función de utilidad e-cóncava



Pendiente (curvatura) de la FUE: *UMa* de la riqueza. Es positiva: Cualquiera que sea la actitud del individuo frente al riesgo, $u' > 0$

De hecho, una FUE se puede definir como:

Definición (F.U.E.): $u(w)$ es una función vNM si es una función de la riqueza, $u' > 0$

◆ Para un individuo averso al riesgo: $u'' < 0$ (*UMa* de la riqueza decreciente)

Para este individuo, el riesgo supone una desutilidad (o un coste).

★ **Cómo determinar ese coste?** Mediante el

Valor Equivalente Cierto (o Equivalente Cierto): Nivel de riqueza w^* que (recibida con certeza) rinde al individuo = utilidad que la que produce participar en la situación incierta

$$u(w^*) = Eu(w)$$

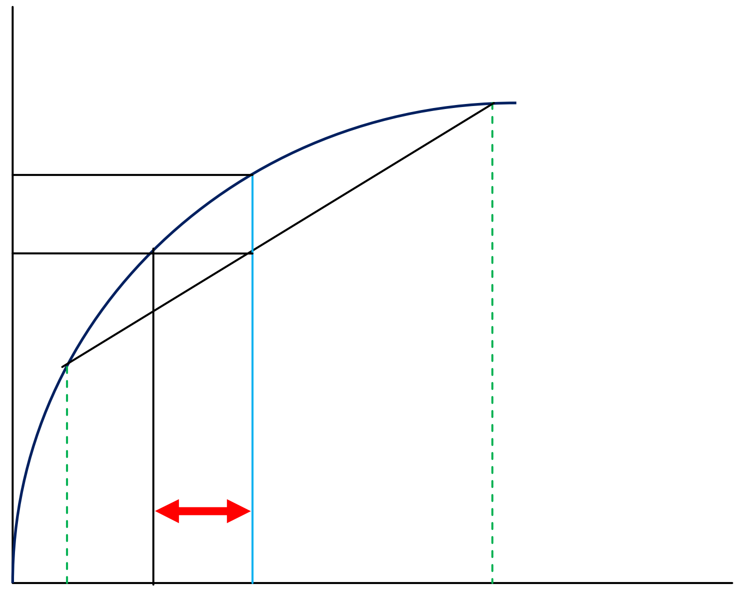
Una medida monetaria del coste del riesgo (para un individuo averso al riesgo) se puede obtener preguntándole qué cantidad de su riqueza cierta (de la riqueza esperada recibida con certeza) estaría dispuesto a dar antes que hacer frente a la situación de riesgo. Esa cantidad de renta es lo que se llama **prima de riesgo o coste del riesgo**, Δ:

Sup. sólo dos estados, 1 y 2, y que la riqueza final esperada es $Ew = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$. Entonces el individuo está indiferente entre jugar y no jugar si

$$u(Ew - \Delta) = E[u(w)]$$

por lo que Δ es la cantidad de renta que resulta de $w^* = Ew - \Delta$, i.e. $\Delta = Ew - w^*$. Y si el individuo es averso al riesgo, resulta $\Delta > 0$

Gráficamente



En su libro de 1944, John von Neuman y Oskar Morgenstern plantean axiomas de elección en incertidumbre que la gente debe satisfacer en situaciones de riesgo para actuar **como si** fuesen maximizadores de la utilidad esperada

Ejemplos de funciones de utilidad que denotan aversión al riesgo:

$$u(w) = w^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1\ ; \qquad u(w) = \ln w; \ldots$$

Ejemplo numérico:

Un individuo con riqueza $w = 64€$ y FUE $u(w) = \sqrt{w}$ tiene la oportunidad de participar en una lotería que consiste en lanzar una moneda al aire: si sale c, obtiene 128€; si sale +, obtiene 0€.

$\tilde{x} = \left(128{,}0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. El coste de participar en la rifa es 64€.

- Cómo es el individuo ante este juego?

Si juega,

$$E[u(w)] = \frac{1}{2}u(64+128-64) + \frac{1}{2}u(64+0-64) \;= \frac{1}{2}\sqrt{128} + \frac{1}{2}\sqrt{0} \;= 5{,}66$$

Si no participa en el juego,

$$u(64) = u[E(64)] = \sqrt{64} = 8$$

Nótese que el juego propuesto es un J.A.J y el individuo prefiere no jugar: Es averso al riesgo.

Un individuo averso rechaza jugar un J.A.J. Ahora bien, no rechaza jugar cualquier tipo de juego (si deja de ser justo y pasa a ser favorable para el individuo, puede aceptar jugarlo)

⇒ Haciendo que el juego deje de ser justo, es probable que el individuo pase a aceptarlo.

❍ ***Continuación del Ejercicio:***

Cómo inducir a jugar a este individuo (averso)? Aumentando el VE del juego:

• Aumentando el premio en caso de ganar

✍ A cuánto tendría que ascender el premio (en caso de resultar el estado bueno) para que el individuo (pese a ser averso) aceptase jugar el juego?

• Disminuyendo el coste de participar en él

✍ Con los mismos premios que los estipulados en el juego inicial (128, 0), ¿cuál tendría que ser el coste de participar en el juego para que el individuo aceptase hacerlo?

Mensaje: Un individuo averso al riesgo rechaza no sólo participar en JAJ (situaciones inciertas cuyo rendimiento esperado es 0), sino también en algunos juegos cuyo valor esperado es >0

2. Neutralidad al riesgo

Completar…

Un individuo neutral al riesgo está indiferente entre aceptar o rechazar JAJ (situaciones inciertas cuyo rendimiento esperado es 0)

3. Amor o preferencia por el riesgo

Completar…

Un individuo amante del riesgo acepta no sólo participar en JAJ (situaciones inciertas cuyo rendimiento esperado es 0), sino en algunos juegos cuyo valor esperado es <0

◆ Un individuo con riqueza inicial w_0. Con probabilidad γ su riqueza (final) será $w_2 = w_0 + x$ (estado bueno), y con probabilidad $1-\gamma$ será $w_1 = w_0 - x$ (estado malo)

- Si es neutral riesgo, entonces

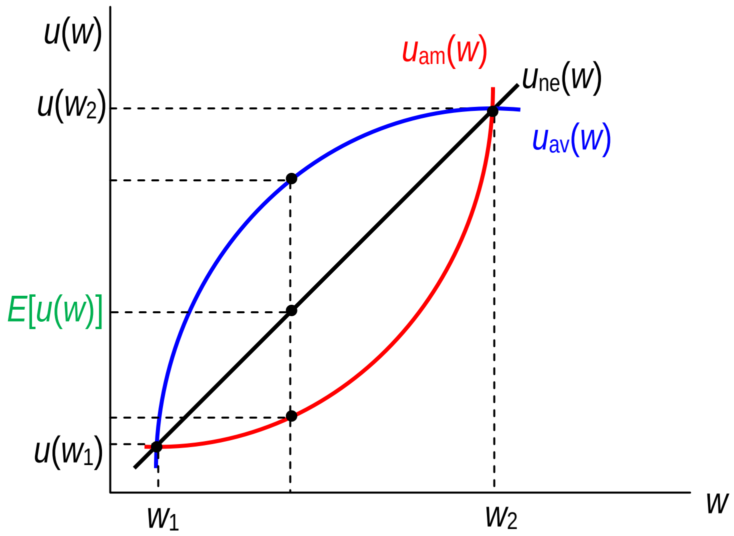
$$\begin{aligned} Eu(\tilde{w}_f) &= \gamma u(w_0 + x) + (1-\gamma)u(w_0 - x) \\ &= \gamma(w_0 + x) + (1-\gamma)(w_0 - x) = u(E\tilde{w}_f) \end{aligned}$$

ya que la utilidad en cada estado es $u(w_n) = w_n$ o alguna transformación afín de esta expresión.

- Si es averso al riesgo, su utilidad es

$$\begin{aligned} Eu(\tilde{w}_f) &= \gamma u(w_0 + x) + (1-\gamma)u(w_0 - x) \\ &< u(\gamma(w_0 + x) + (1-\gamma)(w_0 - x)) = u(E\tilde{w}_f) \end{aligned}$$

- Si es amante…



Tenemos, pues, diversas formas de caracterizar la actitud de los individuos frente al riesgo:

	Aversión al riesgo	Neutralidad al riesgo	Amor al riesgo
Equiv. Cierto	$w^* < Ew$		
Prima Riesgo	$\Delta > 0$		
Juego **justo**	Rechaza		
F.U.E.	$u'' < 0$		

Supuesto habitual: la gente es aversa al riesgo

❖ **Cómo medir el grado de aversión al riesgo?**

Consideremos, a partir de ahora, individuos aversos al riesgo. Cómo precisar su grado de aversión?

Con el valor de $u''(<0)$. Problema: Varía con TA de la f.u.

Normalizando $u''(<0)$ con $u'(>0)$: Coeficiente Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo

Aversión relativa al riesgo

Loterías aditivas (riesgos aditivos)

Def.: Una lotería $\tilde{x}$ es **aditiva** si se añade a una riqueza inicial segura w_0, de manera que $\tilde{w}_f = w_0 + \tilde{x}$. Hay separación perfecta entre w_0 y la lotería $\tilde{x}$

Entonces, el *pv* resulta de

$$u(w_0 + pv) = E[u(w_0 + \tilde{x})] \tag{1}$$

Como (1) es no-lineal (aversión al riego!), pv no es fácil de obtener. La forma de hacerlo es aproximar (1) por un desarrollo de Taylor-McLaurin. En LHS, basta una aproximación de 1º orden; en el RHS, una de 2º orden

$$u(w_0) + pv \cdot u'(w_0) \approx u(w_0) + u'(w_0) \cdot E(\tilde{x}) + \frac{u''(w_0)}{2!} E[(\tilde{x})^2] \tag{2}$$

y si la lotería es actuarialmente equitativa, $E(\tilde{x}) = 0$, y $Var[\tilde{x}] = E[(\tilde{x})^2] = \sigma^2$, con lo cual

$$pv \cdot u'(w_0) \approx \frac{u''(w_0)}{2}\sigma^2 \ \Rightarrow \ pv \approx \frac{\sigma^2}{2}\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}$$

Como $E(\tilde{x}) = 0$, la prima de riesgo resulta

$$\Delta(w_0, \tilde{x}) = 0 - pv \approx \frac{\sigma^2}{2}\left(-\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}\right)$$

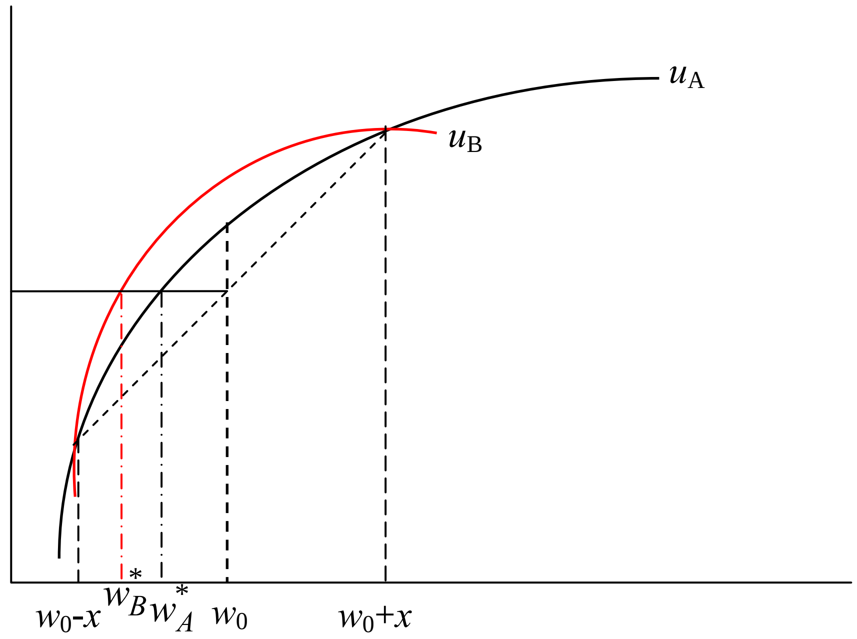
resultado debido a Arrow-Pratt.

La prima de riesgo depende de:

- La cantidad de riesgo (σ^2)

- La expresión $-\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}$, llamada AAR, $\rho(w)$, (este término mide el grado de aversión; cuanto más cóncava es la f.u., mayor es la prima de riesgo asociada a una determinada lotería)

Dos funciones de utilidad, u_B más cóncava que u_A, y una lotería binaria neutral (x,-x; ½,½) que se añade a w_0. Los equivalentes ciertos son w_A^* y w_B^*, y las primas de riesgo $\Delta_A = w_0 - w_A^*$ y $\Delta_B = w_0 - w_B^*$, de tal manera que, para una misma lotería, $\Delta_A < \Delta_B$ por el hecho de que u_B es más cóncava que u_A


u_A
u_B
w_0-x
w_B^*
w_A^*
w_0
w_0+x

Casos particulares: Si la utilidad es lineal (neutralidad al riesgo), $u''=0$ y $\Delta=0$; si es convexa (preferencia por el riesgo), $u''>0$ y $\Delta<0$.

Corolario: (Loterías no justas) El resultado anterior se puede generalizar a estas loterías, sin más que hacer la expansión de Taylor alrededor de $w_0+E(\tilde{x})$ y evaluar la AAR en el punto $w_0+E(\tilde{x})$ en lugar de en w_0.

Idea intuitiva: La AAR $\downarrow$ con w_0. Ahora bien, ¿es esto común a cualquier función de utilidad que presente aversión al riesgo?

- **Logarítmica:** $u(w) = \ln w \;\rightarrow\; \rho(w) = -\frac{u''}{u'} = \frac{1}{w}$ (SI, se corresponde con la intuición). De ahí su profusa utilización a lo largo de la historia (función DARA)

- **Exponencial:** $u(w) = -e^{-\alpha w} \;\rightarrow\; \rho(w) = -\frac{u''}{u'} = \alpha$ (NO, constante!) Está en el límite de lo que parece razonable (CARA)

- **Cuadrática:** $u(w) = w - \beta w^2 \quad \rightarrow \quad \rho(w) = -\frac{u''}{u'} = \frac{2\beta}{1-2\beta w}$ (NO, creciente!) Implica un comportamiento poco verosímil con respecto al nivel de w_0 (IARA)

ENTONCES:

★ La AAR al riesgo $\uparrow$ o $\downarrow$ al aumentar el nivel de riqueza del individuo?

Por una parte, cabe pensar que la *UMa* decreciente de la riqueza hará que las pérdidas potenciales sean menos graves al $\uparrow$ la riqueza $\Rightarrow$ AAR $\downarrow$ al $\uparrow$ la riqueza

Por otra, la *UMa* decreciente de la riqueza también hace que las ganancias potenciales del juego sean menos atractivas al $\uparrow$ la riqueza $\Rightarrow$ AAR $\uparrow$ al $\uparrow$ la riqueza

Resultado neto? Parece indeterminado. De hecho, depende de la función de utilidad

• FUE cuadrática respecto a la riqueza $u(w) = \alpha w - \beta w^2$

Esta FUE es creciente, $u'(\cdot) > 0$, si $\alpha - 2\beta w > 0 \Rightarrow$ está bien definida para niveles de riqueza $w < \dfrac{\alpha}{2\beta}$ (y exhibe un punto de saciedad cuando la riqueza o consumo alcanza ese nivel, $w = \dfrac{\alpha}{2\beta}$)

La AAR de un individuo con este índice de utilidad es $\rho(w) = \dfrac{2\beta}{\alpha - 2\beta w}$, que es creciente en w, $\dfrac{\partial \rho(w)}{\partial w} > 0$. (IARA). Por lo tanto, para un individuo con estas preferencias un activo con riesgo es un bien inferior: cuanto mayor es su riqueza, menor es la predisposición a invertir en dicho activo

❖ Esto contradice la evidencia empírica! de que los individuos más ricos son los que tienen mayores inversiones en activos con riesgo

• FUE logarítmica $u(w) = \ln w$

En este caso, $\rho(w) = \frac{1}{w}$, que es decreciente en la riqueza, $\frac{\partial \rho(w)}{\partial w} < 0$ (DARA)

• FUE exponencial $u(w) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma w}, \; \gamma > 0$

✍ Comprobar que en este caso γ es el grado de aversión absoluto al riesgo. (Función de utilidad CARA)

• FUE de aversión relativa al riesgo constante (CARA)

Es del tipo $u(w)=\dfrac{w^{1-\beta}-1}{1-\beta}=-\dfrac{1}{1-\beta}+\dfrac{1}{1-\beta}w^{1-\beta},\quad \beta\geq 0$

Comprobar que la aversión relativa al riesgo es β

Comprobar que al aumentar β, aumenta la curvatura de la función y la aversión al riesgo.

Casos “raros”:

Si $\beta=0$, la función de utilidad esperada CRRA es lineal, $u(w)=w-1$ (y se corresponde con neutralidad al riesgo)

Si $\beta = 1$, la función no está definida. Pero si $\beta \to 1$, la función CRRA converge a la FUE logarítmica $u(w) = \ln w$

Ver más ejemplos de funciones de utilidad en Antelo (2003), Ejercicios 5.4 y 5.6

★ Loterías multiplicativas (riesgos multiplicativos)

Consideremos ahora una lotería que (siendo justa) representa una fracción de w_0, con lo cual $\tilde{w}_f = w_0(1+\tilde{\varepsilon})$, donde $\tilde{\varepsilon}$ es una v.a. de media nula, $E(\tilde{\varepsilon}) = 0$. (Con este tipo de lotería, $Var[\tilde{w}_f]$ depende de w_0, lo que no era cierto para una lotería aditiva!)

La prima de riesgo Δ se obtiene a partir de

$$u[w_0(1-\Delta)] = E[u[w_0(1+\tilde{\varepsilon})]]$$

Linealizando,

$$u(w_0) - \mathit{\Delta} \cdot w_0 \cdot u'(w_0) = u(w_0) + E(\tilde{\varepsilon}) \cdot w_0 \cdot u'(w_0) + \frac{E(\tilde{\varepsilon}^2)}{2!} w_0^2 \cdot u''(w_0)$$

$$\mathit{\Delta} = \frac{\sigma^2}{2}\left(-\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)} w_0\right)$$

y a la expresión entre paréntesis se le llama ARR, $\rho^R(w)$. (Ahora, se trata de una medida que depende de w_0)

★ Loterías parcialmente multiplicativas (que afectan sólo a una parte de la riqueza inicial)

En este caso, w_0 se descompone como $w_0 = w_0' + w_0''$ y sólo w_0'' está sometida a una lotería neutra o equitativa (que grava w_0''), de manera que $\tilde{w}_f = w_0' + w_0''(1+\tilde{\varepsilon})$. A partir de

$$u[w_0' + w_0''(1-\Delta)] = E\{u(w_0' + w_0''(1+\tilde{\varepsilon}))\}$$

el análisis para calcular la Δ es similar al anterior, sin más que desarrollar la expresión anterior (por Taylor) alrededor de $w_0' + w_0''$ y obteniéndose

$$\Delta = \frac{\sigma^2}{2}\left(-\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)} w_0'' \right)$$

y donde la expresión entre corchetes se llama Aversión Parcial al riesgo.

✍ Ejemplo numérico

Sea un individuo con $u(w) = \ln w$, $w_0 = 1000$.

♦ Una lotería aditiva $\tilde{x} = \left(100, -100; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

El **equivalente cierto** w^* se obtiene de $\ln w^* = \frac{1}{2}\ln 1100 + \frac{1}{2}\ln 900 = 6{,}9027 \;\Rightarrow\; w^* = 994{,}98$ y la **prima de riesgo** resultante es $\Delta = 5{,}02$

Este valor correcto de la prima de riesgo también puede ser aproximado por la fórmula de Arrow-Pratt

$$\Delta \approx \frac{\sigma^2}{2}\left(-\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}\right) = \frac{10000}{2}\frac{1}{w_0} = 5$$

lo que es una buena aproximación.

♦ Sup ahora que el individuo está sometido al riesgo multiplicativo dado por la lotería $\tilde{\varepsilon} = \left(0.05, -0.05; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, i.e. tiene la misma prob de ganar que de perder el 5% de su riqueza.

La prima de riesgo asociada a esta lotería es la solución de

$$\ln(1000(1-\Delta)) = \frac{1}{2}\ln 1050 + \frac{1}{2}\ln 950 = 6{,}9065$$

con lo cual $1000(1-\Delta) = 998{,}75$ y $\Delta = 0{,}00125$

El individuo es indiferente entre el sacrificio seguro del 0,125% de su riqueza y la lotería descrita.

Como la lotería es actuarialmente justa y su varianza es $\sigma^2 = 0{,}0025$, de la aproximación de Arrow-Pratt se obtiene como prima de riesgo

$$\varDelta \approx \frac{\sigma^2}{2}\left(-\frac{u''}{u'}w_0\right) = \frac{0{,}0025}{2}\frac{1000{,}1}{1000} = 0{,}00125$$

lo cual es una aproximación excelente.

♦ Sup finalmente que sólo una parte de la riqueza ($w_0'' = 600$) está sometida al riesgo multiplicativo, mientras que el resto ($w_0' = 400$) corresponde a un activo seguro. Comprobar que, ahora, $\Delta = 0{,}000075$ y que la aproximación por la fórmula de Arrow-Pratt vuelve a ser excelente.

Aversión al riesgo y primas de seguro

Existe alguna relación entre las primas de seguro (info observable en el mercado) y la aversión al riesgo (info privada del agente)? En caso afirmativo, podemos establecer dicha relación a través del coeficiente de aversión al riesgo $\rho(w)$ de Arrow-Pratt?

Proposición. La medida de aversión de Arrow-Pratt $\rho(w)$ es aprox **proporcional** a la cantidad que pagará un individuo por asegurarse ante una apuesta justa

Demo. Sea un individuo con riqueza w_0 y función de utilidad $u(w)$. Consideremos un juego cuyos resultados vienen dados por la v.a. $\tilde{x}$ con $E(\tilde{x})=0$ (JAJ) y varianza σ^2. Sea r la prima de seguro que hace que el individuo esté indiferente entre aceptar la apuesta justa $\tilde{x}$ o bien pagar r para evitarla

$$E[u(w_0+\tilde{x})]=u(w_0-r) \tag{3}$$

Como $u(\cdot)$ es diferenciable, podemos aproximar ambos lados de (3) en torno a un determinado punto (series de Taylor)

En el LHS de (3) es necesaria una aproximación de 2º orden para tener en cuenta la variabilidad (varianza) del juego $\tilde{x}$

$$E[u(w_0+\tilde{x})] \approx E[u(w_0)+\tilde{x}\cdot u'(w_0)+\frac{1}{2}\tilde{x}^2\cdot u''(w_0)+\ldots]$$

$$= u(w_0)+E(\tilde{x})\,u'(w_0)+E\left(\frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)u''(w_0)+\ldots$$

En el RHS de (3) y dado que r es una cantidad fija (la varianza es nula), $w_0 - r$ también es una cantidad fija y basta con una aproximación de 1º grado

$$u(w_0-r) \approx u(w_0)-r\cdot u'(w_0)+\ldots$$

La expresión (3) resulta

$$u(w_0) + E(\tilde{x})\, u'(w_0) + E\left(\frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)u''(w_0) + \ldots = u(w_0) - r \cdot u'(w_0) + \ldots \tag{4}$$

Como $E(\tilde{x}) = 0$, y si despreciamos los términos de orden superior a 2, tenemos

$$E\left(\frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)u''(w_0) = -r \cdot u'(w_0)$$

de donde

$$r \approx E\left(\frac{\tilde{x}^2}{2}\right)\left[-\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}\right] = \frac{\sigma^2}{2}\rho(w_0)\,.\ \blacksquare$$

Un individuo averso al riesgo está dispuesto (con tal de evitar una situación de incertidumbre dada por un juego justo) a pagar una cantidad aproximadamente **proporcional** a su índice de aversión al riesgo

Al ser observables las primas de seguro (info observable: de mercado), éstas pueden utilizarse para inferir la aversión al riesgo de la gente (info privada: preferencias)

YA VISTO

¿En qué sentido podemos decir si un individuo es más o menos averso al riesgo que otro?

Dado que la concavidad de la función de utilidad nos da una idea de si un agente es averso o no, las medidas de aversión van a estar relacionadas con el grado de concavidad de la FUE

(i) El valor absoluto de la curvatura de la FUE, $u''(w)$

Cuanto mayor sea esta derivada, mayor grado de aversión al riesgo presenta el individuo

Problema con esta medida: Depende de las TA que podamos hacer de la FUE

$$u(w) \rightarrow v(w) = \alpha + \beta u(w)$$

$u''(w) \rightarrow v''(w) = \beta u''(w) \neq u''(w)$, siempre que $\beta \neq 1$

¿Cómo resolver este problema?

(ii) Coeficiente Arrow-Pratt de aversión al riesgo, $\rho(w)$

Si normalizamos $u''(w)$ (dividiéndola) por $u'(w)$, el resultado es $\rho(w) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)}$

que es invariante ante TA de la FUE. ✍ Comprobarlo

Problema del coeficiente $\rho(w)$: suele depender (para la mayoría de las funciones de utilidad) del nivel de riqueza inicial del individuo (y esto puede distorsionar el resultado final!)

Ejemplo:

Si utilizamos la medida dada por $\rho(w)$, diríamos que dos individuos, A y B, tienen la misma aversión al riesgo si están dispuestos a arriesgar la misma cantidad de riqueza en términos absolutos (i.e., independientemente de su nivel de riqueza).

Ahora bien, si A tiene una riqueza de 10^6€, es posible que esté más predispuesto a arriesgar 10^4€ que B que sólo tiene 20000€ de riqueza. Al fin y al cabo, A estaría arriesgando sólo el 1% de su riqueza, mientras que B estaría arriesgando el 50% de la suya.

Es probable que A esté dispuesto a arriesgar esa cantidad, pero B no. ¿Significa esto que B es más averso que A? En términos absolutos sí, pero en términos relativos tal vez no. Quizás, si B tuviera el millón de € que tiene A, también estaría dispuesto a arriesgar 10^4€ con la misma predisposición que A.

Para incorporar este tipo de argumento, la pregunta es: ¿Estaría B dispuesto a arriesgar el mismo % de riqueza que arriesga A? Esta es la idea del

(iii) Coeficiente Arrow-Pratt de aversión **relativa** al riesgo, $\rho^R(w)$**,** $\rho^R(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} w$

Esta medida incorpora el argumento anterior y es también invariante a TA de la FUE