4. Aplicaciones

Aplicación 1: Asegurarse contra los malos resultados (contra la incertidumbre)

En general, gente es aversa al riesgo. Sufre desutilidad del riesgo $\Rightarrow$ un individuo tal vez estaría dispuesto a sacrificar parte de su riqueza esperada con tal de evitar el riesgo (y garantizarse así un resultado **seguro** o, cuando menos, con **menor riesgo**).

Esta (la aversión al riesgo) es la razón fundamental que motiva la existencia de la industria del seguro

Pero para que existan seguros, además de posibles **compradores**, tiene que haber **vendedores** de seguros. En este caso, Cuando la prob de que un individuo obtenga un resultado malo es **independiente** de la prob de que lo obtengan otros individuos (v.a. iid), es posible actuar colectivamente (mutualización) para $\downarrow$ el riesgo (ver los portales de las casas del casco antiguo de Santiago)

Compañías de seguros son neutrales al riesgo (**¿**Qué significa neutralidad al riesgo**?** Ver tabla anterior) ¿Por qué pueden ser calificadas de neutrales al riesgo? Porque aseguran a una cantidad N elevada de individuos. Cuando N aumenta, pueden aplicar la **ley de los grandes números** (los valores esperados se dan expost de forma casi exacta)

Ley de los grandes números: Si p es la probabilidad de que ocurra un evento independientemente en cada uno de los N casos posibles, la proporción de casos reales en los que ocurre tiende a p a medida que N aumenta

O la probabilidad de que la media muestral coincida con la media poblacional ↑ con el tamaño de la muestra

Sirve de base para la contratación de seguros

Que las compañías de seguro sean neutrales al riesgo posibilita que haya intercambio con agentes (compradores de seguros) que son aversos

Idea subyacente en la transacción (seguro): Repartir óptimamente el riesgo (y proporcionar los incentivos adecuados)

Definición (Seguro): Un par de números reales (r,S), donde r es la prima de seguro (o relación entre el pago realizado en concepto de póliza y la indemnización a percibir) y S el reembolso (rS es la póliza)

El individuo paga una póliza, rS, que le garantiza la cobertura de una determinada cuantía por cada € de póliza. Dado r (que determina la Compañía), él decide la cantidad que desea pagar en concepto de póliza ya que elige S.

El modelo

Tenemos que analizar la demanda, la oferta y el equilibrio en el mercado de seguros

◆ Demanda de seguro

El problema del tomador de seguro es: **(i)** ¿Comprar o no comprar el seguro, S>0 o S=0? **(ii)** En caso de comprarlo, S>0, qué cantidad (óptima) comprar, S^*?

(ii) Sup que S>0, i.e. que el individuo ha decidido comprar un seguro. Su riqueza inicial es w_0 y su FUE es $u(w)$, con $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$. Incurre en una situación de incertidumbre en la que son posibles dos estados (estado malo y estado bueno):

- con prob p ocurrirá un terremoto que le provocará una pérdida L en su riqueza (estado malo o estado 1)
- con prob $1 - p$ no habrá terremoto (estado bueno o estado 2)

Esta situación queda descrita por la lotería $l = \tilde{x} = (w_0 - L, w_0; p, 1 - p)$

El individuo puede protegerse contra la potencial pérdida. Para ello, debe adquirir un seguro que le indemnizará con *S*€ si hay terremoto. Por dicho seguro ha de pagar *rS*€ en concepto de póliza

Riqueza final del individuo en cada estado es

$$w_1 = w_0 - L - rS + S$$

$$w_2 = w_0 - rS$$

y la utilidad esperada es

$$E[u(w)] = pu(w_1) + (1-p)u(w_2)$$

El problema del individuo es

$$\max_S E[u(w)] = pu(w_0 - L - rS + S) + (1-p)u(w_0 - rS)$$

CPO:

$$0 = \frac{\partial Eu}{\partial S} = pu'(w_0 - L - rS + S)(1-r) - (1-p)u'(w_0 - rS)r$$

i.e.,

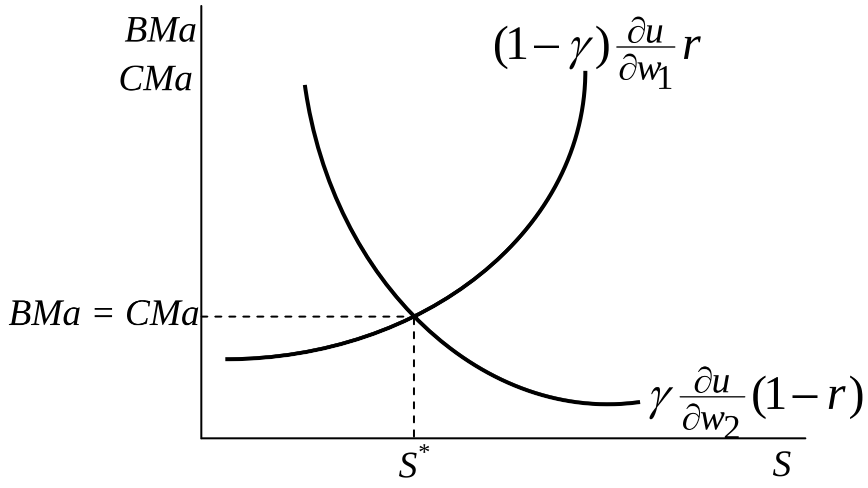
$$pu'(w_0 - L - rS + S)(1-r) = (1-p)u'(w_0 - rS)r \qquad (1)$$

y dado que $u''(\cdot) < 0$:

LHS de (1): Cada € extra de cobertura implica mayor riqueza cuando hay terremoto (estado malo) (beneficio marginal), con lo cual la utilidad marginal de cada € extra de cobertura, $pu'(w_0 - L - rS + S)(1-r)$, $\downarrow$ al $\uparrow S$

RHS de (1): Cada € extra de cobertura implica menor riqueza cuando no hay terremoto (estado bueno) (coste marginal), con lo cual la utilidad marginal de cada € extra de cobertura, $(1-p)u'(w_0 - rS)r$, $\uparrow$ al $\uparrow S$

Gráficamente:



Equilibrio: Bº marginal del seguro = Coste marginal del seguro

CPO (1) se puede reescribir como

$$\frac{u'(w_0 - rS - L + S)}{u'(w_0 - rS)} = \frac{r(1-p)}{p(1-r)} \tag{2}$$

Comprobar que la CSO se verifica

◆ **Oferta de seguro**

Si la compañía de seguros es neutral al riesgo (función de utilidad lineal), maximiza beneficios esperados (criterio de la utilidad esperada coincide con criterio del valor esperado):

$$E\pi = rS - [pS + (1-p)0]$$

y, si opera en un mercado competitivo, el bº max es nulo, $\max E\pi = 0$. Entonces, la prima r a cobrar es

$$r = p$$

Proposición. La prima que fija la Compañía de seguros es igual a la probabilidad de que haya suceso

Corolario. El seguro es un JAJ

(En la realidad, esto no es verdad: ¿Por qué?... Buscar causas)

◆ Equilibrio en el mercado de seguro

Sustituyendo la condición de oferta, $r = p$, en la de demanda, $\dfrac{u'(w_0 - rS - L + S)}{u'(w_0 - rS)} = \dfrac{r(1-p)}{p(1-r)}$, resulta

$$\frac{u'(w_0 - rS - L + S)}{u'(w_0 - rS)} = 1$$

$$u'(w_0 - rS - L + S) = u'(w_0 - rS)$$

$$\Rightarrow \; w_0 - rS - L + S = w_0 - rS$$

Proposición $S^* = L$

Si el seguro es un JAJ, el individuo se asegura completamente ("seguro a todo riesgo")

Este resultado depende del supuesto de que el tomador no puede influir en la prob p de sufrir pérdida

Si lo que haga o deje de hacer (medidas o esfuerzo) influye en *p*, es posible que la compañía sólo quiera ofrecer un seguro parcial (por lo que el consumidor tendrá incentivo para tener cuidado). Ver problema de riesgo moral

(i) Queda por comprobar que $S^* = L > 0$ es preferible para el individuo a $S^* = 0$

$$pu(w_0 - L - rS + S) + (1-p)u(w_0 - rS) > pu(w_0 - L) + (1-p)u(w_0) \text{ ?}$$

Como $S = L$ y $r = p$, esto equivale a probar que

$$u(w_0 - pL) > pu(w_0 - L) + (1-p)u(w_0)$$

lo cual es cierto para una función e-cóncava.

Comprobar lo anterior.

Por lo tanto, el individuo se asegura (parte **(i)**) y, en particular, compra un seguro a todo riesgo (parte **(ii)**)

Ejercicio:

Un individuo tiene la función de utilidad $u(w)=\sqrt{w}$. Su riqueza actual es 10000€, pero hay un 50% de probabilidad de que sufra una pérdida de 3600€. ¿Qué cantidad máxima pagará para asegurarse completamente contra esta pérdida?

Resolución:

Precio de reserva de una póliza de seguro: Diferencia entre la riqueza del individuo y el equivalente cierto de una situación incierta

Si no se asegura, $Eu = 0{,}5\sqrt{10000} + 0{,}5\sqrt{10000 - 3600} = 90$

Sea k la máxima cantidad que está dispuesto a pagar por el seguro. La utilidad esperada si adquiere el seguro tiene que ser (al menos) igual a la que obtiene sin seguro:

$$Eu = 0{,}5\sqrt{10000 - k} + 0{,}5\sqrt{10000 - 3600 - k + 3600} = 90; \qquad k = 1900€ \ \blacksquare$$

✍ Ejercicio continuación: Cambiar la FUE de este individuo por otras con más y menos aversión al riesgo y ver cómo cambia la disponibilidad marginal a pagar por el seguro

Ejercicio.

Un individuo con riqueza inicial w tiene la FUE $u(w) = -e^{-\alpha w} = -\exp(-\alpha w)$. Existe una probabilidad 0,5 de que gane o pierda 1000€. ¿Cuánto está dispuesto a pagar para evitar esta apuesta o juego justo?

Resolución:

De la condición $u(w-k) = u(\tilde{w})$, i.e.,

$$-\exp[-\alpha(w-k)] = -0{,}5\exp[-\alpha(w+1000)] - 0{,}5\exp[-\alpha(w-1000)]$$

resulta, dividiendo todos los términos por $-\exp(-\alpha w)$ (ya que es factor común),

$$\exp(\alpha k) = 0{,}5\exp(-1000\alpha) + 0{,}5\exp(1000\alpha)$$ [1]

y a partir de aquí podemos calcular el valor de k en función de los valores que adopte el parámetro α (que es el grado de aversión al riesgo).

✍ Comprobar que la disponibilidad a pagar para evitar un juego justo es directamente proporcional a la magnitud de la apuesta y al parámetro de aversión al riesgo. Tomar, por ejemplo, los dos casos: apuesta=1000 y $\alpha = 0{,}0001$, $\alpha = 0{,}0004$; apuesta=2000 y $\alpha = 0{,}0001$, $\alpha = 0{,}0004$. ¿Por qué sucede esto?

[1] Al dividir por el factor $-\exp(-\alpha w)$, la disponibilidad a pagar por evitar el riesgo es **independiente** de la riqueza del individuo (propiedad típica de la FUE exponencial); sólo depende del parámetro de aversión al riesgo.

Ejercicio

Consideremos dos agricultores, cada uno con la función de utilidad vNM $u(w)=\sqrt{w}$. Con prob p el valor de la cosecha de cada agricultor es de 50€ (estado bueno) y con prob $1-p$ es 0 (estado malo). Las probabilidades de estos eventos son i.i.d. (no están correlacionadas entre los agricultores (si uno tiene un resultado malo, no implica que el otro también tenga mal resultado)). El nivel de subsistencia de cada agricultor es de 25€ (es lo mínimo que necesita en comida).

¿Es óptimo para estos agricultores crear una asociación entre ellos (por la que dividen sus cosechas a partes iguales si uno de ellos está por debajo del nivel de subsistencia y el otro no) y compartir así el riesgo (seguro mutuo)?

Resolución:

Tenemos que probar que la política de compartir riesgos aumenta la utilidad esperada de cada agricultor.

Si agrupan riesgos (risk-pooling), la utilidad esperada de cada agricultor es

$$Eu^{RP} = p^2 u\left(\frac{50+50}{2}\right) + (1-p)\,pu\left(\frac{0+50}{2}\right) + (1-p)^2 u\left(\frac{0+0}{2}\right) + p(1-p)u\left(\frac{50+0}{2}\right)$$

$$= p\sqrt{50}[p + (1-p)\sqrt{2}] \qquad (1)$$

Si no agrupan riesgos, cada agricultor obtiene como utilidad esperada

$$Eu^{nRP} = pu(50) + (1-p)u(0)$$

$$= p\sqrt{50} + (1-p)\sqrt{0}$$

$$= p\sqrt{50} \qquad (2)$$

y es inmediato probar que (1) > (2):

$$p\sqrt{50}[p + (1-p)\sqrt{2}] > p\sqrt{50}$$

ya que

$$[p + (1-p)\sqrt{2} - 1] > 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$(1-p)[\sqrt{2}-1]>0\text{, porque } \sqrt{2}>1.$$

Por lo tanto, $Eu^{RP} > Eu^{nRP}$. Para los agricultores es mejor compartir riesgos que actuar por separado. ■

● Si fueran neutrales al riesgo (si tuviesen, por ejemplo, las preferencias dadas por $u(w)=w$), entonces su utilidad esperada es la misma compartiendo el riesgo que no compartiéndolo.

$$Eu^{RP} = p^2 50 + (1-p)p25 + (1-p)^2 0 + p(1-p)25 = p50$$

$$Eu^{nRP} = pu(50) + (1 - p)u(0)$$

$$= p50$$

◆ **El caso de un seguro parcial: Por ejemplo, una póliza con una cláusula de franquicia.**

Idea: ¿Cuál es la cantidad máxima que estará dispuesto a pagar un individuo por un seguro en el que tenga que asumir los primeros *x*€ de pérdida? Ver Antelo (2000)…

Ejemplo:

Un individuo cuya riqueza inicial es $w = 100000$€ tiene prob 0,25 de sufrir una pérdida de 20000€. Si su función vNM es logarítmica,

- ¿Cuál es su precio de reserva por un seguro justo?

Resolución:

Sin seguro,

$$Eu = 0{,}75u(100000) + 0{,}25u(80000) = 0{,}75\ln 100000 + 0{,}25\ln 80000 = 11{,}4571$$

La póliza a pagar si el seguro es justo será de $0{,}25 \times 20000 = 5000$€. Si compra un seguro completo (y sabemos que sí por la teoría que hemos visto), su utilidad (cierta) será

$$Eu = 0{,}75u(100000 - 5000) + 0{,}25u(100000 - 20000 - 5000 + 20000) = u(95000) = 11{,}4616$$

que es mayor que la utilidad sin seguro.

La cantidad máxima k que pagará por el seguro es la que resulta de resolver

$$u(100000 - k) = \ln(100000 - k)$$

$$= 11{,}4571$$

Es decir, $100000 - k = e^{11,4571}$, de donde $k = 5426$€. Este individuo estaría dispuesto a pagar hasta 426€ por encima de la cuantía actuarialmente justa (los 5000€ para cubrir el valor esperado de la pérdida) y aún tendría la misma utilidad que estando sin seguro. ■

¿Qué pasaría si la utilidad del individuo fuese lineal? ¿Y si fuese convexa?

• Una póliza que cuesta 5200€ y devuelve 20000€ en caso de pérdida (póliza actuarialmente no justa), ¿estará dispuesto a comprarla el individuo?

Sí. La riqueza que tendría el individuo en los dos estados de la naturaleza es

$$\underbrace{100000 - 5200}_{\text{Estado bueno}} = \underbrace{100000 - 5200 - 20000 + 20000}_{\text{Estado malo}} = 94800$$

y la utilidad esperada, $Eu = 11{,}4595$, es MAYOR que la que obtiene sin seguro.

Calcular la disponibilidad a pagar por esta póliza de seguro

• Una póliza que cuesta 4900€ y exige que el individuo asuma los primeros 1000€ de pérdida (franquicia) SEGURO PARCIAL, ¿estaría dispuesto el individuo a adquirirla?

Estado bueno: $w_1 = 100000 - 4900 = 95100$€

Estado malo: $w_2 = 100000 - 4900 - 20000 + 19000 = 94100$€

OJO: ¡Aunque se reduce respecto a la situación sin seguro, queda algo de riesgo!

La utilidad es

$$Eu = 0{,}75 \ln 95100 + 0{,}25 \ln 94100 = 11{,}46,$$

que es mayor que la utilidad sin seguro

✍ ¿Cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar el individuo por este seguro con franquicia?