Aplicación 2: Diversificación de las inversiones (problema de selección de cartera)

Hecho empírico: Cuanto mayor es el valor esperado (rendimiento) de una inversión NO es cierto que sea más apetecible. (Si inversores neutrales al riesgo, sí.)

$\rightarrow$ Por la aversión al riesgo: la gente trata de evitar inversiones en las que (el rdto esperado puede ser alto, pero) el riesgo de sufrir pérdidas también es alto

¿Cómo formalizar esto? Mediante la max de la utilidad esperada, teniendo en cuenta qué parte de riqueza invertirá en activos cuya rentabilidad es cierta y en activos inciertos

1. El problema de selección de cartera (un activo incierto y dinero)

Un individuo con riqueza w desea invertir z, $0 \leq z \leq w$, en un activo incierto. Este activo le reportará un rdto por € invertido de r_1 con prob p y de r_2 con prob $1-p$. El resto de su riqueza, $w-z$, la mantiene en dinero (cuyo rdto es cero) (no hay inflación en la economía)

Problema de diseño de cartera: ¿Cómo determina la inversión óptima z^*?

<u>Respuesta:</u>

Riqueza final en cada estado de la naturaleza es:

$$w_1 = w - z + z(1 + r_1) = w + r_1 z$$

$$w_2 = w - z + z(1 + r_2) = w + r_2 z$$

La situación incierta es, pues, la lotería $(w + r_1 z, w + r_2 z; p, 1 - p)$

Problema (de diseño de cartera) del individuo

$$\max_z Eu = pu(w + r_1 z) + (1 - p)u(w + r_2 z)$$

CPO:

$$0 = \frac{\partial Eu}{\partial z} = pu'(w + r_1 z)r_1 + (1 - p)u'(w + r_2 z)r_2 \qquad (3)$$

✍ Comprobar que la CSO se verifica siempre que el individuo sea averso al riesgo

Determinemos el cambio de utilidad esperada del primer € invertido. Evaluamos CPO (3) para $z = 0$ (i.e., en términos discretos, para el primer € invertido):

$$\left.\frac{\partial Eu}{\partial z}\right|_{z=0} = pu'(w)r_1 + (1 - p)u'(w)r_2 = 0$$

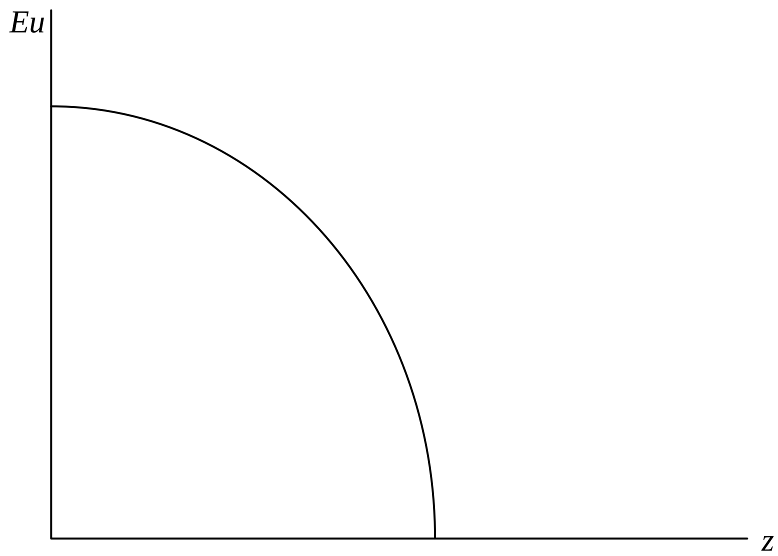
i.e.

$$u'(w)[pr_1 + (1 - p)r_2] = 0 \qquad (4)$$

y dado que $u'(w) > 0$, sign de (4) dependerá del rdto esperado del activo:

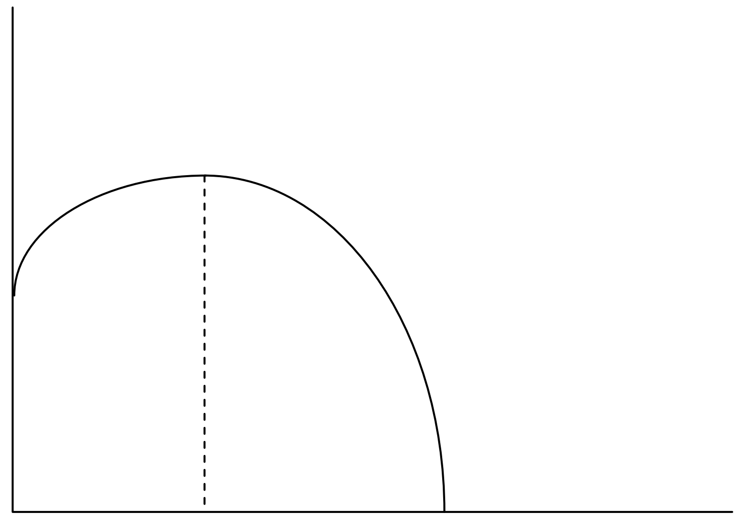
• Si $pr_1 + (1-p)r_2 < 0$, entonces $\left.\frac{\partial Eu}{\partial z}\right|_{z=0} < 0 \Rightarrow z^* = 0$

Si el activo tiene rdto esperado negativo, la utilidad esperada ↓ cuando se invierte el primer € en él. Y dado que $u'' < 0$, la utilidad sigue ↓ cuando se siguen invirtiendo € adicionales: el individuo no invierte nada en el activo (mantiene todo en dinero). Cartera óptima es $(0, w)$ o, simplemente, w.



- Si $pr_1 + (1-p)r_2 > 0$, entonces $\left.\frac{\partial Eu}{\partial z}\right|_{z=0} > 0 \Rightarrow z^* > 0$

Si el activo tiene rdto esperado positivo, la cantidad invertida en él será estrictamente positiva, con lo cual $w - z^*$ es lo que mantendrá en dinero



El individuo siempre querrá invertir algo en el activo incierto, independientemente de lo averso que sea al riesgo. La cartera óptima es $(z^*, w - z^*)$

En este contexto,

◆ **¿Cómo afectan los impuestos (s/ los rendimientos) a la inversión en activos inciertos?**

Sea z^* la inversión óptima en el activo incierto **sin impuestos** y $\bar{z}$ la inversión óptima **con impuestos**:

Proposición. Un impuesto sobre el rendimiento de un activo incierto **aumenta** la inversión en él, $\bar{z} > z^*$.

Demo: Sup que el individuo cotiza al tipo impositivo *t*, $0 < t < 1 \Rightarrow$ rdto neto en cada estado de la naturaleza será, resp., $(1-t)r_1$ y $(1-t)r_2$.

• CPO que determina inversión óptima z^* **sin impuestos** es

$$pu'(w+r_1 z)r_1 + (1-p)u'(w+r_2 z)r_2 = 0 \tag{5}$$

la cual permite obtener z^*.

• CPO que caracteriza inversión óptima $\bar{z}$ **con impuestos** es

$$pu'(w+z(1-t)r_1) + (1-p)u'(w+z(1-t)r_2) = 0 \tag{6}$$

de donde se obtiene $\bar{z}$.

Comparando (5) y (6), y teniendo en cuenta que $(1-t)r_1$ y $(1-t)r_2$, se puede demostrar que $\bar{z} = \frac{1}{1-t} z^*$. En efecto, $\bar{z} = \frac{1}{1-t} z^*$ verifica la CPO sin impuestos (5): Introduciendo $\bar{z} = \frac{1}{1-t} z^*$ en (6), resulta

$$pu'(w + \frac{z^*}{1-t}(1-t)r_1) + (1-p)u'(w + \frac{z^*}{1-t}(1-t)r_2) = 0$$

i.e.

$$pu'(w + z^* r_1) + (1-p)u'(w + z^* r_2) = 0$$

que coincide con la CPO sin impuestos dada en (5). Queda así demostrado que $\bar{z} = \dfrac{1}{1-t} z^*$, i.e. $\bar{z} > z^*$. ■

Explicación:

Cuando se fija un impuesto, la ganancia en el estado bueno es menor (se trata de un impuesto sobre la ganancia cuando el rdto es positivo), pero también la pérdida en el estado malo es menor (el impuesto se convierte en una subvención sobre la pérdida cuando el rdto es negativo). El impuesto consigue reducir la varianza (riesgo)! y hace así más apetecible el juego para un individuo averso!

Multiplicando por $1/(1-t)$ la inversión en el activo incierto cuando no hay impuesto, lo que el individuo consigue, en un contexto de impuestos, es **reproducir** los mismos rdtos (una vez deducidos los impuestos) que obtenía antes de impuestos. Por lo tanto, el impuesto reduce el rdto esperado (neto), pero también reduce el riesgo

$\Rightarrow$ Cuando hay **impuestos**, basta con que el individuo **aumente** la inversión en el activo incierto para poder obtener el mismo rdto de antes y así contrarrestar el efecto del impuesto (y, sin embargo, soportar menos riesgo). Y aumentará la inversión porque el riesgo es menor!

2. El problema de selección de cartera con un activo incierto y un activo seguro (distinto del dinero (y, por tanto, con un rdto positivo))

Sup que el individuo no mantiene nada de su riqueza w en dinero como sucedía hasta ahora (es un activo que ofrece rendimiento nulo! si sup que no existe inflación). En la economía existen dos tipos de activos financieros:

- un **activo cierto** (con un rdto que no depende de los estados de la naturaleza) y

- un activo **incierto** (con un rdto aleatorio).

El individuo invierte z en el activo con riesgo (cuyo rdto puede ser r_1 con prob p y r_2 con prob $1-p$) y el resto, $w-z$, en el activo seguro (cuyo rdto es $r_s>0$). (En el caso 1, $r_s=0$.)

Problema de selección de cartera: ¿Cantidad de recursos *z* a invertir en el activo incierto?

Analicemos este problema en cada uno de los tres casos posibles por separado:

◆ Individuo **averso** al riesgo

$$\max_{z} Eu = pu(z(1+r_1)+(w-z)(1+r_s))+(1-p)u(z(1+r_2)+(w-z)(1+r_s))$$

• CPO c.r.a. activo con riesgo es

$$0=\frac{\partial Eu}{\partial z}= pu'(\cdot)[1+r_1-(1+r_s)]+(1-p)u'(\cdot)[1+r_2-(1+r_s)]$$

Es decir,

$$0=\frac{\partial Eu}{\partial z}=u'(\cdot)[pr_1+(1-p)r_2-r_s]$$

donde $pr_1+(1-p)r_2=E(\tilde{r})$

(La suficiencia de la CPO está garantizada por el sign de la 2ª derivada: Comprobar)

Definición (Prima de riesgo de un activo**):** La **PR** de un activo es su rdto esperado menos el rdto libre de riesgo, $E(\tilde{r})-r_s$

Proposición:

(i) Si $pr_1 + (1-p)r_2 < r_s$, i.e., si $E[\tilde{r} - r_s] < 0$, el rdto esperado del activo incierto no supera la retribución del activo seguro $\Rightarrow$ la **PR** es negativa $\Rightarrow z^* = 0$

🗣 Cuando PR < 0, el individuo invierte toda la riqueza en el activo seguro

(ii) Si $pr_1 + (1-p)r_2 > r_s$, i.e., si $E[\tilde{r} - r_s] > 0$, PR > 0 $\Rightarrow$... los individuos mantendrán cantidades positivas del activo con riesgo, $z^* > 0$

◆ Individuo **neutral** al riesgo, $u''(\cdot) = 0$

Proposición:

(i) Si la PR del activo incierto es 0, $E(\tilde{r})-r_S=0$ (activo seguro), el individuo es indiferente frente a todas las carteras posibles, es decir, cualquier cartera *z* (formada por cualquier proporción "activo incierto-activo seguro") satisface la CPO

(ii) Si la PR es distinta de 0, $E(\tilde{r})-r_S \neq 0$, el individuo comprará (venderá) el activo incierto si la PR es positiva (negativa)

- El individuo es **amante** del riesgo, $u''(\cdot)>0$,

Proposición:

Establecer esta proposición

La cartera óptima es única y el signo de z dependerá de la PR del activo incierto (Comprobar)

En definitiva, la CPO $\frac{\partial Eu}{\partial z} = 0$ determina la diversificación del riesgo que asume el individuo

OJO: La solución del problema de selección de cartera depende del tipo de activos que estemos considerando. Existen activos en los que, por su naturaleza, no es posible mantener una posición corta, con lo cual, en este caso, tendríamos que incorporar en el análisis una restricción de no negatividad en la cuantía de la inversión en el activo incierto, $z \geq 0$.

3. El problema formal de selección de cartera en el caso general

(Ver Antelo (2003), pp. 346 y ss.)

***

Salvo que un nuevo activo esté perfectamente correlacionado con el portfolio (en este caso el individuo está comprando más de lo mismo), la contribución del nuevo activo al riesgo de la cartera es **menor** que la varianza de la nueva cartera

$\Rightarrow$ al evaluar un activo, al inversor le importa tanto el rdto esperado como el riesgo

$\Rightarrow$ debe considerar el efecto del activo sobre el rdto y sobre el riesgo de la cartera diversificada del inversor.

$\Rightarrow$ es preciso estimar las correlaciones (covarianzas) entre la rentabilidad del activo y las de los otros activos de la cartera

“Gracia” o “interés” de la diversificación: Mientras que el rdto esperado de la cartera es **igual** a la suma ponderada de los rdtos esperados de sus componentes, la varianza de la cartera es **menor** a la suma ponderada de las varianzas de los activos que la componen

La base para diversificar una cartera de valores, en el supuesto de que los rdtos de los activos sigan una distribución normal, es un **par** de relaciones estadísticas.

Consideremos dos v.a. v_1 y v_2 (pueden representar los rdtos de dos activos financieros), con medias μ_1 y μ_2, resp., y varianzas σ_1^2 y σ_2^2, resp. Sea σ_{12} la covarianza, con lo cual el coeficiente de correlación es $\rho_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$.

La media μ y la varianza σ^2 de la v.a. v construida como una ponderación de las dos anteriores (cartera), $v = \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2$, con $\alpha \in (0,1)$ son:

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Ejemplo:

Dados 2 activos con rdtos i.i.d. ($\mu_1 = \mu_2; \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \rho_{12}$), una cartera con = proporción de los dos activos ($\alpha = 0{,}5$) ofrecerá el rdto $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, i.e. el mismo rdto que cualquiera de los dos activos. Sin embargo, el riesgo de la cartera se REDUCE ya que:

(i) Si $\rho_{12} > 0$ (cuando el rdto de uno de los valores ↑, el del otro también ↑), el riesgo de la cartera es $\sigma^2 = 0{,}25\sigma_1^2 + 0{,}25\sigma_2^2 + 0{,}5\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0{,}5\sigma_1^2 + 0{,}5\sigma_{12}$ (no sabemos realmente si se reduce o no el riesgo, porque estamos considerando activos positivamente correlacionados: y en este caso ¡combinar reduce el riesgo?) (Ver inicio de párrafo comentario en rojo)

(ii) Si $\rho_{12} = 0$, el riesgo de la cartera se reduce a la mitad del riesgo de cualquiera de los dos activos ya que $\sigma^2 = 0{,}25\sigma_1^2 + 0{,}25\sigma_2^2 = 0{,}5\sigma_1^2$

(iii) Si $\rho_{12} < 0$, el riesgo de la cartera aún se reduce más que en el caso (ii) por cuanto $\sigma^2 = 0{,}25\sigma_1^2 + 0{,}25\sigma_2^2 - 0{,}5\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0{,}5\sigma_1^2 - 0{,}5\sigma_{12}$.

Esta $\downarrow$ riesgo es lo que se conoce como efecto diversificación ("no pongas todos los huevos en la misma cesta")

***

Sup que el individuo puede invertir en A activos, $1,\ldots,A$, y sea θ_a el porcentaje de riqueza que destina al activo a, $a = 1,\ldots,A$. El rdto del activo a viene dado por la v.a. $\tilde{r}_a$.

La **rentabilidad** de la cartera (portfolio) P es

$$E(\tilde{r}_P) \equiv \bar{r}_P = \sum_{a=1}^{A} \theta_a E(\tilde{r}_a) = \sum_{a=1}^{A} \theta_a \bar{r}_a$$

y el **riesgo**

$$\sigma_P^2 = E[(\tilde{r}_P - \bar{r}_P)^2] = E\left[\sum_{a=1}^{A} \theta_a (\tilde{r}_a - \bar{r}_a)\right]^2 = \sum_{a=1}^{A} \sum_{a'=1}^{A} \theta_a \theta_{a'} \sigma_{aa'}$$

siendo $\sigma_{aa'}$ la covarianza entre los activos a y a', $\sigma_{aa'} = E[(r_a - \bar{r}_a)(r_{a'} - \bar{r}_{a'})]$

o, alternativamente, $\sigma_P^2 = E[(\tilde{r}_P - \bar{r}_P)^2] = E\left[\sum_{a=1}^{A} \theta_a (\tilde{r}_a - \bar{r}_a)\right]^2 = \sum_{a=1}^{A} \sum_{a'=1}^{A} \theta_a \theta_{a'} \sigma_a \sigma_{a'} \rho_{aa'}$

donde $\rho_{aa'} = \dfrac{\sigma_{aa'}}{\sigma_a \sigma_{a'}}$ es el coeficiente de correlación entre los activos a y a'.

Si $\sigma_{aa'} = 0$ (>0) (<0), los rdtos de los dos activos no están correlacionados entre sí (están positivamente correlacionados) (negativamente correlacionados)

Dado que existen múltiples carteras P que ofrecen el mismo valor esperado y/o la misma variabilidad, el problema del inversor es elegir la cartera que rinda una μ_P **máxima** para una σ_P dada o bien la que ofrezca una σ_P **mínima** para una μ_P dada. Éstas son las **carteras eficientes**.

Para resolver el problema, tenemos que caracterizar:

(1) Las **<u>preferencias del individuo</u>** (2) El **<u>conjunto de oportunidades de cartera</u>**.

<u>1. Preferencias del individuo</u>

Si la f.u.e. (en función de la riqueza o rendimiento) $u(\tilde{r})$ del individuo es de clase 2, podemos aproximarla (alrededor del rendimiento medio $\bar{r}$) mediante una serie de Taylor hasta el término de grado 2:

$$u(\tilde{r}) \approx u(\bar{r}) + u'(\bar{r})(\tilde{r} - \bar{r}) + \frac{1}{2}u''(\bar{r})(\tilde{r} - \bar{r})^2 + ... \qquad (1)$$

Si tomamos esperanzas en (1),

$$E\left[u(\tilde{r})\right] = u(\bar{r}) + u'(\bar{r})E(\tilde{r} - \bar{r}) + \frac{1}{2}u''(\bar{r})E(\tilde{r} - \bar{r})^2 + \dots$$

$$= u(\bar{r}) + 0 + \frac{1}{2}u''(\bar{r})\sigma_{\tilde{r}}^2 + \dots \qquad (2)$$

Es decir, la utilidad esperada depende de la rentabilidad esperada y de la varianza. (Esto es importante porque es más fácil medir la media y la varianza de una cartera o activo que la utilidad esperada)

En el espacio (rdto, riesgo), las curvas de indiferencia se obtienen de (2) sin más que derivar

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E\left[u(\tilde{r})\right] &= u'(\bar{r})\mathrm{d}\bar{r} + \frac{1}{2}u''(\bar{r})\sigma_{\tilde{r}}^2\mathrm{d}\bar{r} + \frac{1}{2}u''(\bar{r})\mathrm{d}\sigma_{\tilde{r}}^2 \\ &= \mathrm{d}\bar{r} + \frac{1}{2}\frac{u''(\bar{r})}{u'(\bar{r})}\mathrm{d}\sigma_{\tilde{r}}^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que si la *UMa* del dinero es decreciente, podemos escribir $\rho(\bar{r}) = -\frac{1}{2}\frac{u''(\bar{r})}{u'(\bar{r})}$,

resulta

$$\mathrm{d}E\left[u(\tilde{r})\right] = \mathrm{d}\bar{r} - \rho\mathrm{d}\sigma_{\tilde{r}}^2$$

i.e.,

$$E\left[u(\tilde{r})\right] = \bar{r} - \rho\sigma_{\tilde{r}}^2$$

$$= \mu_{\tilde{r}} - \rho\sigma^2_{\tilde{r}}$$

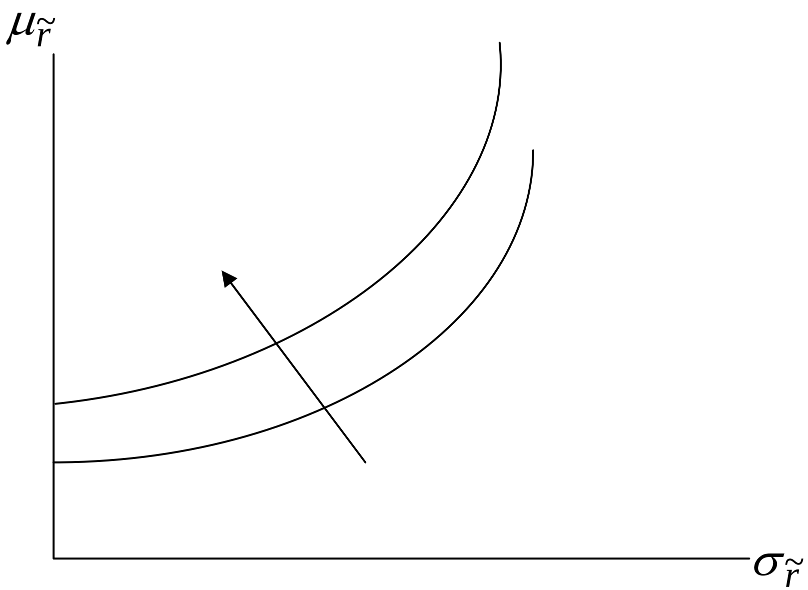
lo cual significa que la f.u.e. del individuo puede aproximarse por una función lineal de μ y σ^2 (o de μ y σ). De aquí resulta

$$\mu_{\tilde{r}}(\sigma_{\tilde{r}}) = E[u(\tilde{r})] + \rho\sigma^2_{\tilde{r}}$$

con lo cual,

$$\frac{\mathrm{d}\mu_{\tilde{r}}}{\mathrm{d}\sigma^2_{\tilde{r}}} > 0$$

Las curvas de indiferencia del individuo tienen pendiente positiva porque (si bien el rdto es un bien), el riesgo es un mal



El criterio de elección entre el activo a y el activo a' es

$$a \succeq a' \Leftrightarrow E[u(\tilde{r}_a)] \geq E[u(\tilde{r}_{a'})] \Leftrightarrow \mu_{\tilde{r}_a} - \rho\sigma_{\tilde{r}_a}^2 \geq \mu_{\tilde{r}_{a'}} - \rho\sigma_{\tilde{r}_{a'}}^2$$

◆ Caso particular de 2 activos ($a = 1,2$) con rentabilidades esperadas $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$ y var. σ_1^2 y σ_2^2

Si θ_a es el % de riqueza que destina al activo a, $a = 1,2$, la cartera $P = (\theta_1, \theta_2)$ se caracteriza por

$$\bar{r}_P = \theta_1 \bar{r}_1 + \theta_2 \bar{r}_2$$

y

$$\sigma_P^2 = \theta_1^2 \sigma_1^2 + \theta_2^2 \sigma_2^2 + 2\theta_1 \theta_2 \sigma_{12}$$

siendo σ_{12} la covarianza entre $\tilde{r}_1$ y $\tilde{r}_2$, $\sigma_{12} = E[(\tilde{r}_1 - \bar{r}_1)(\tilde{r}_2 - \bar{r}_2)]$

o, lo que es lo mismo,

$$\sigma_P^2 = \theta_1^2\sigma_1^2 + \theta_2^2\sigma_2^2 + 2\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

donde, como siempre, ρ_{12} es el coeficiente de correlación, $\rho_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$.

◆ **(Activos correlacionados positivamente)** [Caso algo raro y poco compatible con la "diversificación": para diversificar, se invierte en dos activos positivamente correlacionados?] Si los activos están perfectamente correlacionados, $\rho_{12} = 1$, entonces la cartera se caracteriza por

$$\bar{r}_P = \theta_1\bar{r}_1 + \theta_2\bar{r}_2$$

y

$$\sigma_P^2 = \theta_1^2\sigma_1^2 + \theta_2^2\sigma_2^2 + 2\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2 1 = (\theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2)^2 \qquad \Rightarrow \quad \sigma_P = \theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2$$

Proposición: Si los activos están **perfecta y positivamente correlacionados**, la cartera P se caracteriza porque:

• Su rentabilidad es una combinación lineal convexa de las rentabilidades de los activos (esto siempre será cierto)

• Su riesgo (desviación típica) es también una comb lineal convexa de las desviaciones típicas de los dos activos $\Rightarrow$ la proporción de activos con la que se construye la cartera es $\theta_1^* = 0$ y $\theta_2^* = 1$

Demostración: El problema consiste en

$$\min_{\theta_1,\theta_2} \quad \theta_1\sigma_1+\theta_2\sigma_2, \text{ s.a: } \theta_1+\theta_2=1$$

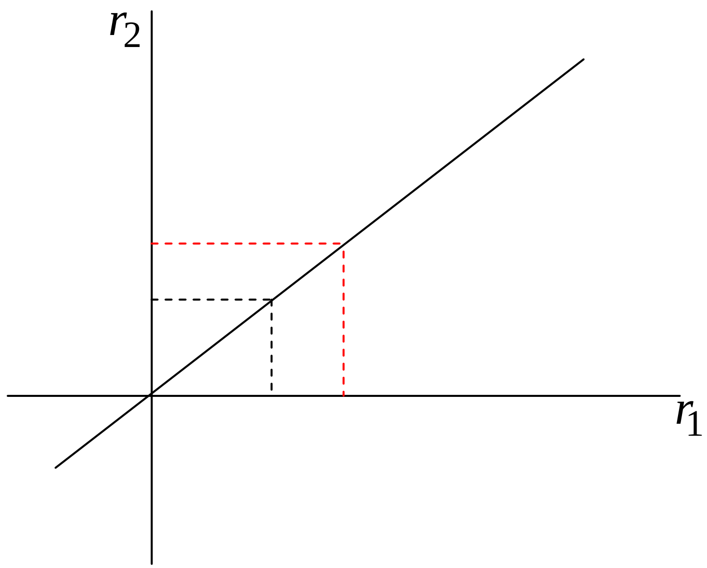
La función objetivo es lineal: la solución se obtiene como $\theta_1=\dfrac{-\theta_2\sigma_2}{\sigma_1}$, y teniendo en cuenta la restricción $\theta_1+\theta_2=1$, i.e., $\theta_1-1=-\theta_2$, resulta $\theta_1=\dfrac{(\theta_1-1)\sigma_2}{\sigma_1} \Rightarrow \theta_1=\dfrac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}$. Entonces, $\theta_2=1-\theta_1$ implica que $\theta_2=1-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}=-\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}$. Por lo tanto,

• Si $\sigma_2 > \sigma_1$, $\theta_2 = -\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} < 0$, con lo cual lo óptimo es $\theta_2 = 0$, en cuyo caso $\theta_1 = 1$

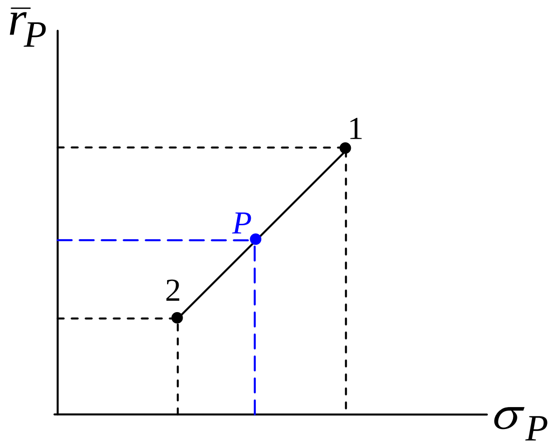
• Si $\sigma_2 < \sigma_1$, lo óptimo es $\theta_2 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$, con lo cual $\theta_1 = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} < 0$. Entonces $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 1$

Es decir, las carteras óptimas son las de extremos. Este resultado "extraño" se deriva de lo "raro" de este caso para diversificar y reducir con ello el riesgo (combinar dos activos que están + correlacionados??) (Ver al inicio de párrafo comentario en rojo)

Gráficamente (sup, p.e., activo 1 tiene mayor rendimiento y también mayor riesgo que activo 2)



r_2
r_1



$\bar{r}_P$
1
P
2
σ_P

◆ **(Activos correlacionados negativamente)** Si los activos están perfectamente correlacionados, pero negativamente, $\rho_{12} = -1$, la cartera se caracteriza por

$$\bar{r}_P = \theta_1 \bar{r}_1 + \theta_2 \bar{r}_2$$

y

$$\sigma_P^2 = \theta_1^2 \sigma_1^2 + \theta_2^2 \sigma_2^2 + 2\theta_1 \theta_2 \sigma_1 \sigma_2 (-1) = (\theta_1 \sigma_1 - \theta_2 \sigma_2)^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_P = \theta_1 \sigma_1 - \theta_2 \sigma_2$$

Proposición: Si los activos están **perfecta y negativamente correlacionados**, la cartera P se caracteriza porque:

- La rentabilidad de la cartera (continúa siendo) una combinación lineal convexa de las rentabilidades de los activos

El riesgo se reduce **combinando** los dos activos, pero **no de cualquier forma** como sucedía antes (sino de una forma muy concreta) ¿Cuál? Observando la expresión de σ_P, se ve que:

• El riesgo (desviación típica) de P no es una combinación lineal convexa de las desviaciones típicas de los dos activos (como sucedía en el primer caso)

• La composición óptima de la cartera es $\theta_1^* = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ y $\theta_2^* = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$

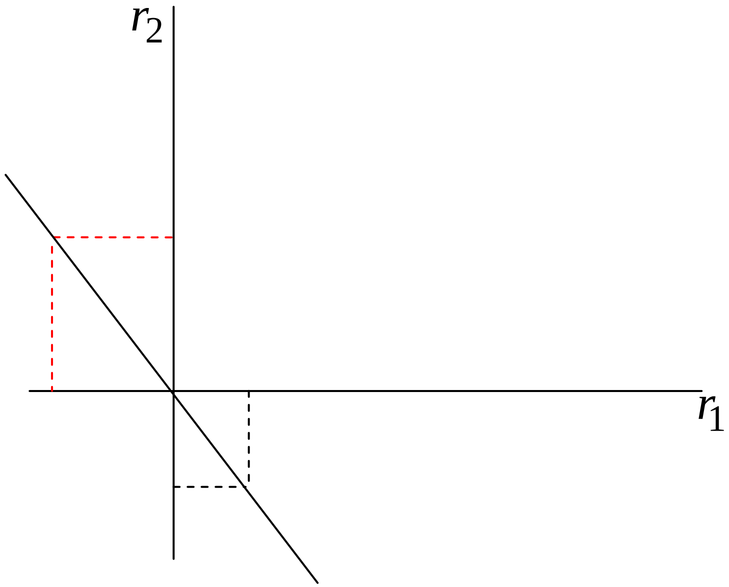
<u>Demostración:</u> El problema consiste en

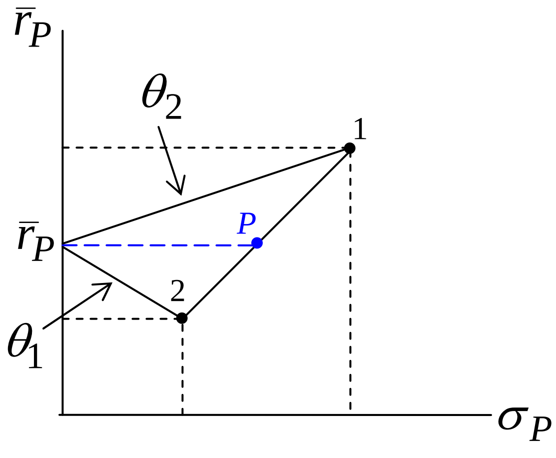
$$\min_{\theta_1, \theta_2} \quad \theta_1 \sigma_1 - \theta_2 \sigma_2, \text{ s.a: } \theta_1 + \theta_2 = 1$$

Como la función objetivo es lineal, la solución se obtiene como $\theta_1 = \dfrac{\theta_2 \sigma_2}{\sigma_1}$, y teniendo en cuenta la restricción $\theta_2 = 1 - \theta_1$, resulta $\theta_1 = \dfrac{(1-\theta_1)\sigma_2}{\sigma_1} \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$. Finalmente, de la restricción $\theta_2 = 1 - \theta_1$, resulta $\theta_2 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$.

Es decir, cuanto **más** se invierta en el activo 2 (que es el de **menor riesgo**) más reduce el riesgo de la cartera sin afectar con ello a la rentabilidad de la misma)

Gráficamente:





◆ **(Activos incorrelacionados)** Si los activos no están correlacionados, $\rho_{12} = 0$, la cartera P se caracteriza por

$$\bar{r}_P = \theta_1 \bar{r}_1 + \theta_2 \bar{r}_2$$

y

$$\sigma_P^2 = \theta_1^2\sigma_1^2 + \theta_2^2\sigma_2^2 + 2\theta_1\theta_2\sigma_1\sigma_2(0) = \theta_1^2\sigma_1^2 + \theta_2^2\sigma_2^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_P = \sqrt{\theta_1^2\sigma_1^2 + \theta_2^2\sigma_2^2}$$

La cartera óptima, en caso de activos incorrelacionados, es

Proposición: Si los activos están **incorrelacionados**, la cartera *P* se caracteriza porque:

• La rentabilidad de la cartera (continúa siendo) una combinación lineal convexa de las rentabilidades de los activos

El riesgo se reduce **combinando** los dos activos, (pero **no de cualquier forma** como sucedía antes, sino de una forma muy concreta) de la siguiente forma: $\theta_1^* = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ y $\theta_2^* = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

<u>Demostración:</u> El problema consiste en

$$\min_{\theta_1, \theta_2} \sqrt{\theta_1^2 \sigma_1^2 + \theta_2^2 \sigma_2^2} \text{, s.a: } \theta_1 + \theta_2 = 1$$

A partir de la función auxiliar de Lagrange, $L = \sqrt{\theta_1^2 \sigma_1^2 + \theta_2^2 \sigma_2^2} + \lambda(1 - \theta_1 - \theta_2)$, las CPO que resultan son:

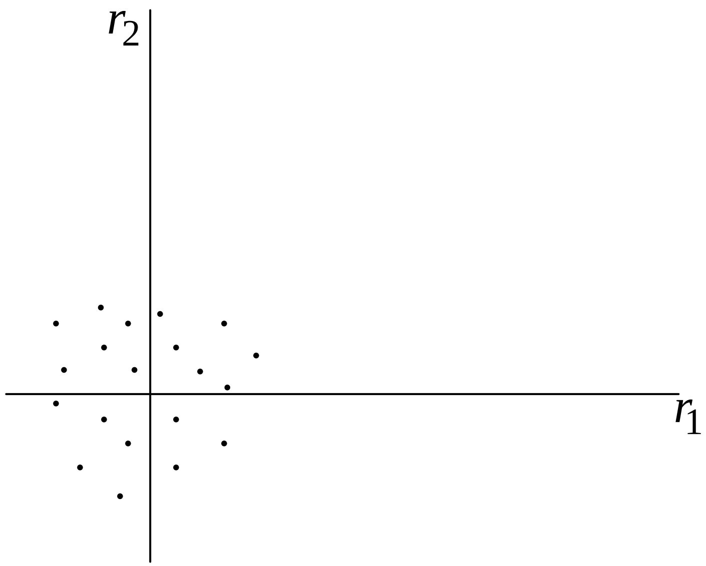
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{\theta_1 \sigma_1^2}{\sqrt{\theta_1^2 \sigma_1^2 + \theta_2^2 \sigma_2^2}} - \lambda = 0$$

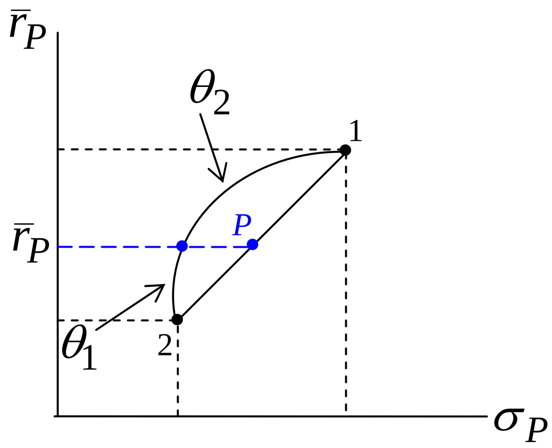
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{\theta_2 \sigma_2^2}{\sqrt{\theta_1^2 \sigma_1^2 + \theta_2^2 \sigma_2^2}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \theta_1 - \theta_2 = 0$$

Resolviendo, se obtiene el resultado planteado.

Gráficamente:



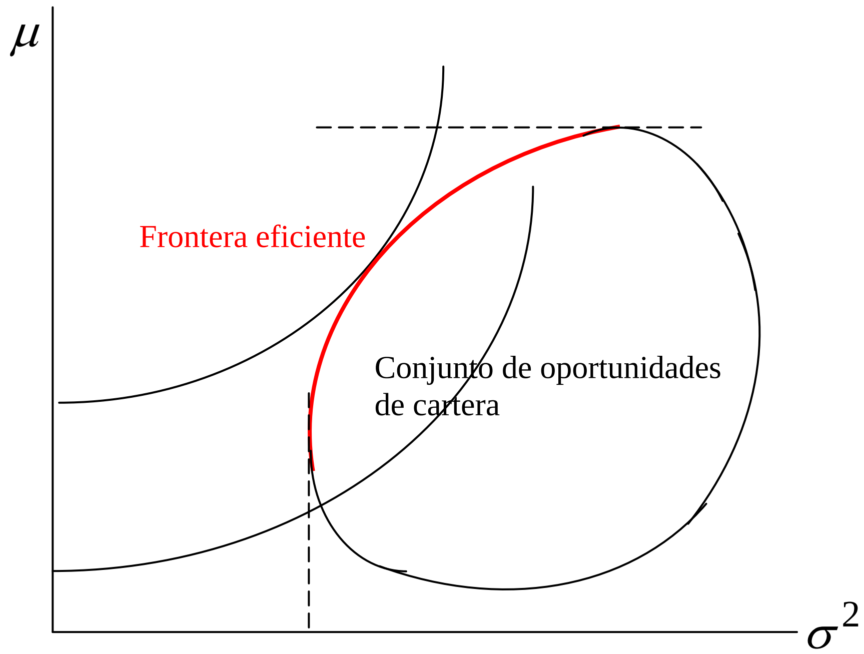


Además, dado que $\frac{\partial\theta_1^*}{\partial\sigma_1^2} = \frac{-\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} < 0$ y $\frac{\partial\theta_1^*}{\partial\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} > 0$, se invierte más en el activo con menor riesgo.

2. Conjunto de oportunidades de cartera

Consideremos A activos, $a = 1,2,...,A$, no correlacionados perfectamente y sup que todos los individuos tienen las mismas valoraciones de los riesgos y rdtos de estos activos (el aspecto analizado en el apartado (1) es común para todos ellos),

Entonces el conjunto de oportunidades de cartera o combinaciones (σ,μ) es un conjunto convexo (dado que incluye activos no perfectamente correlacionados) del siguiente tipo



Ahora bien, no todas las carteras de este conjunto son válidas para el individuo (las que dominan a otras son las eficientes).

Problema de cartera es un problema del tipo

$$\max \bar{r}_P - \rho\sigma_P^2 = \sum_{a=1}^{A} \theta_a E[\tilde{r}_a] - \rho \sum_{a=1}^{A} \sum_{a'=1}^{A} \theta_a \theta_{a'} Cov[\tilde{r}_a, \tilde{r}_{a'}]$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \sum_{a=1}^{A} \theta_a \leq 1 \\ -\theta_a \leq 0, \quad a = 1, \ldots, A \end{cases}$$

y para resolver este problema se han propuesto, además de la función objetivo $\bar{r}_P - \rho\sigma_P^2$, muchas otras (Ver Antelo (2003), p. 351.)