Aplicación 3: Rendimiento y riesgo de los activos financieros: el modelo CAPM

Idea de las modernas t^{as} de finanzas: Relacionar el riesgo y el rdto (esperado) de un activo

Más concretamente: explicar el comportamiento del rdto requerido de una acción (activo) considerando su grado de **riesgo no diversificable** o riesgo de mercado

¿Cómo medir de manera formal el **riesgo no diversificable** de un activo? A través de la **beta**

Y la beta de un activo (o cartera de activos) ¿cómo se determina? A través del modelo de valoración de activos de capital o CAPM (Capital Asset Pricing Model)

Relaciona el rdto con el riesgo de un activo que se mantiene como parte de una cartera (portfolio) y en condiciones de equilibrio de mercado

Idea: Cuanto mayor es el riesgo de invertir en un activo, mayor debe ser su rdto para compensar el ↑ en el riesgo

● **Motivación para el CAPM:** Inversores prefieren menos riesgo

Dos inversiones:

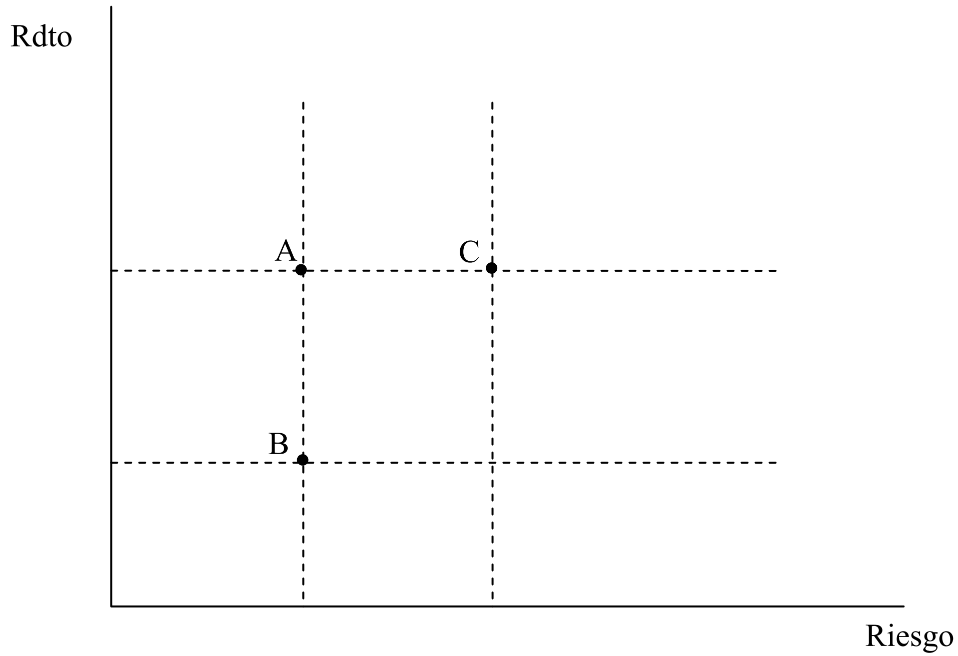
- Depositar 10€ en una cuenta de ahorro con un rdto anual del 5%
- Comprar un acción en la bolsa por 10€ con igual prob de poder venderla en 12€ o 8€ un año más tarde

¿Qué es + atractivo para inversores aversos al riesgo?

Como las dos inversiones tienen el mismo rdto esperado, es preferible la cuenta de ahorro que es menos arriesgada

♠ **¿Cómo ven los inversores riesgo y rdto?**

- Para un nivel de riesgo, la alternativa preferida es la que tiene rdto esperado mayor, $A \succ B$
- Para un nivel de rdto, la preferida es la que tiene el nivel de riesgo menor, $A \succ C$



Una observación empírica: inversores buscan compensación por variabilidad

Título	Rdto esperado (%)	Variabilidad: Desv tip del rdto esperado (%)
Libre de riesgo		0
Bonos del tesoro		
Deuda pública doméstica		
Deuda pub internacional		
Acciones		

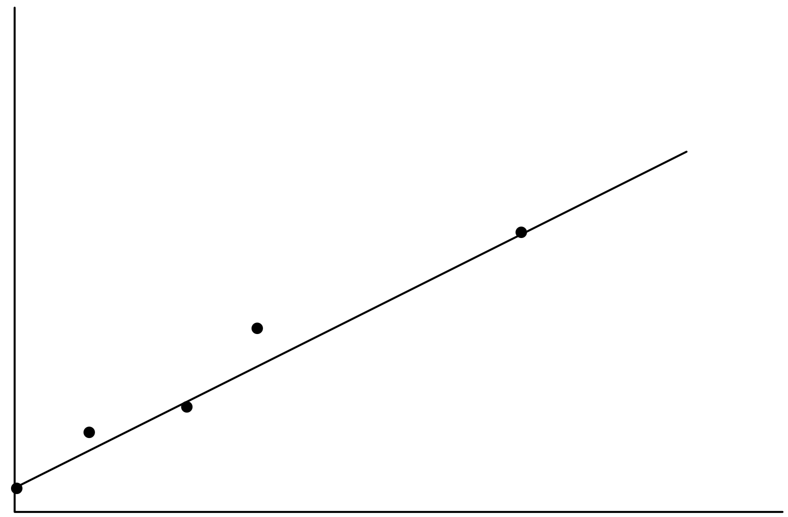
✍ Completar esta tabla con datos reales

☐ De la info suministrada por la tabla se puede concluir:

- Tasa sin riesgo: Es el rdto esperado si no hay variabilidad
- Títulos con mayor variabilidad reflejan una **prima** en el rdto esperado

- Correlación entre variabilidad en el retorno y rdto esperado
- Relación entre variabilidad y rdto esperado: una tendencia hacia arriba

Si representásemos gráficamente la info de la tabla, tendríamos algo así:



⭘ Componentes del riesgo

En finanzas se divide el riesgo (desviación típica) en dos partes:

Riesgo de mercado (sistemático, no diversificable o riesgo país)

Cuando un inversor ha invertido en todas las alternativas (activos) disponibles de una economía (**cartera de mercado**), aún queda una cantidad de riesgo remanente derivado de aspectos como la inflación, subidas en el tipo de interés, guerras, recesiones,…, que son factores que afectan por igual a todas las empresas

Como todas las empresas resultan afectadas simultáneamente, este tipo de riesgo no puede ser eliminado (ni siquiera reducido) mediante diversificación

<u>Riesgo único (no sistemático, idiosincrático, diversificable)</u>

Surge de aspectos como huelgas, pleitos, reestructuraciones… y otros eventos que son únicos para una empresa en particular $\Rightarrow$ los efectos sobre una cartera pueden ser eliminados mediante diversificación

Riesgo total = Riesgo sistemático (RS) + Riesgo no sistemático (RNS)

Como el RNS se puede eliminar **diversificando** las inversiones a través de un portfolio, el único riesgo relevante y no diversificable es el RS

◆ Papel de la diversificación:

El riesgo único o RNS se puede ↓ (o incluso eliminar) a través de una cartera de inversiones

Ejemplo: (Riesgo y desviación típica para una cartera de dos acciones: A y B).

Acción A: caracterizada por Rdto esperado = 20%; Desv tipica del rdto esperado = 20%

Acción B: Rdto esperado = 20%; Desv tipica del rdto esperado = 20%

→ ¿Qué sucede con una cartera formada con cantidades iguales de estas dos acciones?

Rdto esperado es $\mu_P = \frac{1}{2} \times 20\% + \frac{1}{2} \times 20\% = 20\%$

Riesgo (desviación típica) de la cartera es, sin embargo,

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}(0{,}20)(0{,}20) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(0{,}20)(0{,}20) + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}(0{,}20)(0{,}20)\rho_{12}}$$

Es decir, NO es un promedio ponderado de los riesgos de los títulos individuales. Depende de la correlación entre los títulos

$\Rightarrow$ (tenemos que analizar los diferentes casos en función de la correlación existente)

Correlación entre A y B	Rdto esperado portfolio	Desviación típica portfolio
1	20%	20%
0,5	20%	17,3%
0	20%	14,1%
-1	20%	0,0%

Excepto en el caso en el que $\rho_{AB} = 1$, la diversificación consigue reducir el riesgo.

La mayoría de las inversiones no están perfectamente correlacionadas ($\rho_{AB} < 1$)

$\Rightarrow$ Una cartera lleva a una $\downarrow$ del riesgo

Incluso (con correlación negativa) se puede eliminar todo el riesgo

◆ Generalización para portfolios con *N* acciones

Fórmula de la desviación típica del rdto esperado de la cartera formada con N títulos

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_a \sum_{a'} \theta_a \theta_{a'} \sigma_a \sigma_{a'} \rho_{aa'}} \quad (1)$$

Si las N acciones entran a formar parte de la cartera en proporciones iguales, $\theta_a = \dfrac{1}{N}$, $a = 1,\ldots,N$, en (1) tenemos:

- N términos de varianzas ponderadas
- $N^2 - N$ términos de covarianzas ponderadas

Entonces

$$\sigma_P^2 = N\left(\frac{1}{N}\right)^2 \times \text{Varianza promedio} + (N^2 - N)\left(\frac{1}{N}\right)^2 \times \text{Covarianza promedio}$$

$$= \frac{1}{N} \times \text{Varianza promedio} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \times \text{Covarianza promedio}$$

de donde

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{1}{N} \times \text{Varianza promedio} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \times \text{Covarianza promedio}}$$

Si N es suficientemente grande, entonces $\frac{1}{N} \to 0$, con lo cual:

• el término de **varianza promedio** asociado con el **riesgo único** se convierte en irrelevante

• el término de **covarianza promedio** asociado con el **riesgo de mercado** es relevante

□ Definición de una medida formal del riesgo

• Inversores esperan compensación por riesgo sistemático o riesgo de mercado

• La desviación típica de los rdtos refleja riesgos de mercado y riesgo no sistemático (único)

• Se necesita un mecanismo para extraer el componente de riesgo de mercado

• Un punto de referencia: la cartera de mercado

Definición: El conjunto completo de títulos disponibles (caracterizado por: r_m rdto esperado de la cartera de mercado y σ_m desv típica del rdto esperado de la cartera de mercado)

• **Beta:** índice de riesgo de la inversión en un activo (o cartera) en relación con la cartera de mercado

Se concentra en el componente de correlación (sistemática) de los rdtos

La relación de equilibrio que describe el CAPM es

"El exceso de rentabilidad de un activo incierto (sobre la rentabilidad fija) puede **expresarse** en función de la rentabilidad de una cartera de referencia (**la cartera de mercado: por ejemplo, los índices bursátiles más representativos**) ajustada por un índice de riesgo **beta** que mide el riesgo del activo en relación con el riesgo de (la cartera de) mercado"

La beta mide, pues, el riesgo relativo del rendimiento esperado de una inversión o cartera

Formalmente:

$$E(r_i - r_f) = \beta_{im}\ E(r_m - r_f)$$

$$= \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)} E(r_m - r_f) \qquad (2)$$

donde:

$E(r_i - r_f)$: exceso de rentabilidad del activo *i* (o rentabilidad adicional a la ofrecida por un activo de renta fija o libre de riesgo)

$\beta_{im} = \dfrac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)} = \dfrac{\sigma_{im}}{\sigma_i^2}$: beta del activo i (Relación entre la covarianza del rendimiento del activo i y el rendimiento de la cartera de mercado con la varianza del rendimiento de la cartera de mercado)

$E(r_m - r_f)$: exceso de rentabilidad de la cartera de mercado—cartera formada por el conjunto completo de activos disponibles—(o rentabilidad adicional a la ofrecida por un activo libre de riesgo)

La beta se mide, pues, a través del modelo CAPM

Por definición, la cartera de mercado tiene una beta igual a 1, $\beta_m = 1$

El modelo

CAPM se deriva del modelo de cartera de Markowitz (1952). Este modelo plantea la min del riesgo de la cartera (medido por la varianza) s.a. un nivel mínimo de rentabilidad esperada

Alternativamente, se puede plantear el problema **dual** de max la rentabilidad esperada s.a. un nivel máximo de riesgo de la cartera

En el óptimo, las soluciones de ambos problemas coinciden

Cuando es posible diversificar, el riesgo que cuenta es sólo aquél que no se puede diversificar, y debe ser medido en relación al aporte que el activo hace al riesgo de la cartera

Cuando un inversor ha invertido en todas las alternativas (activos) disponibles de una economía (**cartera de mercado**), aún queda una cantidad de riesgo remanente (riesgo no diversificable o riesgo país) derivado de aspectos como la inflación, subidas en el tipo de interés, guerras, recesiones,…, que son factores que afectan a todas las empresas de forma conjunta

Como todas las empresas resultan afectadas por igual, este tipo de riesgo no puede ser eliminado ni siquiera reducido mediante diversificación

Para el CAPM, el riesgo de una acción se divide en **riesgo diversificable**, riesgo específico de una empresa o riesgo no sistemático y **riesgo no diversificable**, riesgo de mercado o riesgo sistemático. Este último es el + importante para el CAPM y es lo que mide el factor beta

Riesgo total = Riesgo no sistemático (RNS) + Riesgo sistemático (RS)

RNS: Surge de aspectos como huelgas, pleitos, reestructuraciones… y otros eventos que son únicos para una empresa en particular $\Rightarrow$ los efectos sobre una cartera pueden ser eliminados mediante la diversificación

La cantidad de RS es lo que se llama factor **beta**, que es la relación existente entre la covarianza del rendimiento del activo arriesgado y el de la cartera de mercado *m* con la varianza del rendimiento de la cartera de mercado *m*

La beta mide el RS, i.e., el riesgo de la economía como un todo. Éste surge de aspectos como la inflación, recesiones económicas, aumentos en los tipos de interés,… (factores que afectan a todas las empresas de forma conjunta y, por tanto, es un riesgo que no puede ser eliminado mediante diversificación)

Como el RNS se puede eliminar diversificando las inversiones, el único riesgo relevante y no diversificable es el RS

Conclusión: la tasa de descuento relevante para un inversor es la obtenida por el modelo CAPM

Definición: La **beta** de una acción relaciona el exceso de rendimiento de la acción respecto a la tasa libre de riesgo con el exceso de rendimiento de mercado respecto a la tasa libre de riesgo

O, alternativamente, mide el riesgo de un activo en relación con el de la cartera de mercado (la bolsa en su conjunto, por ejemplo)

$$\beta_i = \frac{\text{Grado de riesgo del activo } i}{\text{Grado de riesgo de la cartera de mercado (la bolsa)}} \tag{3}$$

- Dado que, por definición, el riesgo de la cartera de mercado *m* es igual a 1 y

- Dado que la beta se puede interpretar como el grado de respuesta de la variabilidad del rdto de un título (o cartera) a la variabilidad del rendimiento de mercado,

entonces:

- Si $\beta_i = 1$, se trata de un activo que tiene el mismo riesgo que el mercado en su conjunto (cuando el mercado suba un 1%, la acción también subirá, en promedio, un 1%): Activo de riesgo promedio

- Si $\beta_i > 1$, es un título cuyo rdto varía en mayor proporción que el rdto de la cartera de mercado (es decir, el valor *i* es más arriesgado que la cartera de mercado): Acción arriesgada. Amplifica el movimiento de mercado

- Si $\beta_i < 1$, se trata de una inversión cuyo rdto varía en menor proporción que el rdto de mercado (es un valor menos arriesgado que la cartera de mdo): Acción defensiva (amortigua el movimiento de mercado)

[Si $\beta_i < 0$, se trata de una acción superdefensiva]

Dado que los inversores esperan rdtos más altos para un mayor riesgo del mercado, deben esperar mayores rdtos para inversiones con betas más altas

◆ Supuestos del modelo CAPM:

1. Inversores aversos al riesgo y max utilidad esperada de su riqueza al final del periodo
2. Toman los precios como dados y tienen expectativas homogéneas sobre rdtos de los activos, los cuales tienen una distribución normal conjunta
3. Hay un activo libre de riesgo en el que pueden invertir o desinvertir ilimitadamente a la tasa libre de riesgo
4. Cantidades de todos los activos son negociables y perfectamente divisbles
5. Mercados de activos están libres de fricciones
6. Información es gratuita y está al alcance de todos los inversores
7. No imperfecciones en el mercado (impuestos, leyes regulatorias,…)

Supuestos 1-7 implican que CAPM está basado en los postulados de la t[a] microeconómica, donde el consumidor (inversor) elige entre curvas de indiferencia que, en términos de riesgo y rdto, le dan la misma utilidad esperada

Esta elección entre riesgo y rdto hace que el inversor:

(i) forme carteras (portfolios) con activos inciertos y activos seguros

(ii) se enfrente a un mercado de fondos prestables que debe estar en eq. en todo momento

Además, el inversor max la utilidad de una función del tipo

$$Eu(w) = E(w) - \frac{1}{2}\rho\,\sigma_w^2$$

que equivale a max el rdto esperado sobre sus activos y minimizar el riesgo

Esta conducta de los inversores ⇒ que exista un conjunto de carteras que max el rdto esperado dado el riesgo asumido o bien minimizan el riesgo para un rdto esperado determinado: son las **carteras eficientes**

CAPM requiere que exista equilibrio en el mercado (que los precios de todos los activos deben establecerse de modo que oferta de todos ellos sea = a la demanda por sostenerlos) y carteras eficientes

⇒ En eq no debe existir exceso de D no de O

Si se expresa la rentabilidad de la cartera como la rentabilidad ponderada de invertir en una activo *i* cualquiera y la combinación *m* de los restantes activos (cartera de mercado *m*), la ecuación (del modelo CAPM) que resume el eq de mercado y la existencia de carteras eficientes es

$$E(r_i) = r_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_i^2}[E(r_m) - r_f]$$

$$= r_f + \beta_{im}[E(r_m) - r_f] \quad (4)$$

Es decir, la tasa de rdto esperada de un activo arriesgado *i* es la tasa libre de riesgo + una tasa de premio por el riesgo (risk premium)

Definición. El **premio por el riesgo** es la cantidad asumida de riesgo, que es la llamada **beta**, β_{im}, multiplicada por el precio del riesgo o prima de riesgo, $E(r_m) - r_f$

Ejercicio

Supongamos que la rentabilidad media del mercado es el 11% y que la volatilidad (desviación típica) es el 10%, mientras que el rendimiento sin riesgo es el 5%. Consideremos dos acciones, *A* y *B*, caracterizadas del siguiente modo:

	Correlación con el mercado	Desviación típica
A	0,2	0,4
B	0,5	0,3

1. Calcular las betas de las mencionadas acciones, así como la beta de la cartera *P* formada con la misma proporción de cada una de las dos, $P = (\theta_A, \theta_B) = (0{,}5;\ 0{,}5)$

2. Calcular los rendimientos requeridos por el mercado para los activos A y B y para la cartera $P = (\theta_A, \theta_B) = (0{,}5;\ 0{,}5)$

3. Representar gráficamente los resultados

<u>Resolución:</u>

1. La beta (o nivel de riesgo) de la inversión en el activo individual A es

$$\beta_A = \frac{\rho_{Am}\sigma_{\tilde{r}_A}\sigma_{\tilde{r}_m}}{\sigma^2_{\tilde{r}_m}} = \frac{0{,}2 \times 0{,}4 \times 0{,}1}{(0{,}1)^2} = 0{,}8$$

Es decir, se trata de una acción **defensiva**: su rdto varía en menor proporción que el rdto de mercado (es una acción menos arriesgada que la cartera de mercado)

Análogamente,

$$\beta_B = 1{,}5$$

y, en este caso, se trata de una acción (**arriesgada**) más arriesgada que el mercado.

Por último, la beta de una cartera es el promedio ponderado de las betas individuales

$$\beta_P = 0{,}5\beta_A + 0{,}5\beta_B = 1{,}15$$

y dicha cartera, por tener una beta mayor que 1, es una inversión más arriesgada que el mercado.

2. A partir de la ecuación del CAPM, la rentabilidad exigida por el mercado para el activo *A* se determina a partir de

$$E(\tilde{r}_A) = r_f + \beta_A E(\tilde{r}_m - \tilde{r}_A) = 0{,}05 + (0{,}8)(0{,}11 - 0{,}05) = 9{,}8\%$$

y para el activo *B*,

$$E(\tilde{r}_B) = 14\%$$

(mayor que en el caso anterior, porque este título es más arriesgado)

Para la cartera *P*,

$$E(\tilde{r}_P) = 0{,}05 + (1{,}15)(0{,}11 - 0{,}05) = 11{,}9\%$$

3. Para representar gráficamente los resultados, ver Antelo (2003), p. 363. ■

◆ **Estadísticamente, ¿cómo se determina la beta de un activo o de una cartera?**

Empíricamente, la beta de un activo i se estima mediante un **modelo de regresión lineal simple** de dos variables (una regresión del rdto del activo contra el rdto de mercado)

$$r_{it} = \alpha + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it} \tag{5}$$

también llamada línea característica del mercado de títulos (Security Market Line)

donde:

r_{it} es la tasa de rdto del activo i en el periodo t (variable dependiente)

α es el rdto autónomo (ordenada en el origen)

β_i es el factor beta (cantidad de riesgo no diversificable)

r_{mt} es la tasa de rdto del mercado en el periodo t (variable explicativa)

ε_{it} es el residuo de la regresión en el periodo t (perturbación estocástica)

Los valores de las variables r_{it} y r_{mt} son observables, pero no los de ε_{it} $\Rightarrow$ el modelo es de naturaleza estocástica $\Rightarrow$ para cada valor de r_{mt} existe una distribución de probabilidad de valores de r_{it}

α y β_i son los parámetros de regresión (son los parámetros que pretendemos estimar)

Como las observaciones de r_{it} y r_{mt} se efectúan a lo largo del tiempo, se trata de datos de **series temporales**

Para que la beta estimada así sea el mejor estimador **insesgado** de la regresión dada en (5) (*estimador lineal insesgado óptimo*:

- que sea insesgado (i.e., cuya media es igual al valor del parámetro de la población que vamos a estimar),
- que sea una combinación lineal de las observaciones muestrales, y
- que su varianza sea menor que la de cualquier otro estimador lineal insesgado),

se requiere que la regresión satisfaga los supuestos básicos de mínimos cuadrados ordinarios:

① Normalidad: ε_{it} se distribuye normalmente

② Media cero: El valor medio de los errores estocásticos es igual a cero, $E(\varepsilon_{it}) = 0$

Estos dos supuestos considerados conjuntamente:

$\Rightarrow$ Para cada valor de r_{mt}, el término de perturbación s.d. normalmente alrededor de 0 $\Rightarrow$ ε_{it} es continuo y sus valores se extienden entre $-\infty$ y $+\infty$, s.d. simétricamente en torno a su media, y su distribución queda totalmente determinada por dos parámetros: la media y la varianza

③ No existencia de autorregresión entre los errores: $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{it-s}) = 0$, $t > s$

Que las perturbaciones no sean autorregresivas significa que la perturbación correspondiente al periodo t no está relacionada con la perturbación correspondiente al periodo $t - s$

Los supuestos ② y ③ tomados conjuntamente ⇒ las perturbaciones no están correlacionadas, $Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{it-s}) = 0$

Los supuestos ①, ② y ③ tomados conjuntamente ⇒ las perturbaciones son independientes en sentido probabilístico

④ Homoscedasticidad o igual varianza entre los errores: $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma^2$

⇒ todas las perturbaciones tienen una misma varianza σ^2 cuyo valor es desconocido. Este supuesto elimina la posibilidad de que la dispersión de las perturbaciones sea, por ejemplo, mayor para los valores grandes de r_{mt} que para los pequeños: la variación en r_{it} es la misma cuando el valor r_{mt} es grande que cuando es pequeño

⑤ La variable explicativa r_{mt} es:

• una variable no estocástica,

• tiene valores fijos en todas las muestras, y

• para *todo* tamaño muestral, $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{mt}-\bar{r}_{mt})^2$ es un número finito distinto de 0 sea cual sea el tamaño de la muestra (i.e., los valores de r_{mt} en la muestra no deben ser todos iguales y no pueden variar con el tamaño de la muestra)

La especificación completa del modelo de regresión lineal simple consta, pues, de la ecuación de regresión dada en (5) y los cinco supuestos básicos. Esto representa el "modelo clásico de regresión lineal simple"

$\Rightarrow$ El modelo incluye tres parámetros desconocidos, los parámetros de regresión, α y β_i, y la varianza de la perturbación, σ^2

A partir de aquí, se estima por MCO (minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores observados respecto de su media)

y los estimadores mínimocuadráticos de los parámetros de regresión tienen todas las propiedades deseables

Una vez estimada la **beta**, ésta se utiliza para calcular el rendimiento requerido del activo por medio de la ecuación del CAPM que, empíricamente, se calcula como

$$r_{it} - r_{ft} = \beta_i (r_{mt} - r_{it}) + \varepsilon_{it}$$

donde

(i) Se ha agregado el tiempo en las variables

(ii) Se ha eliminado el operador E porque se usan datos ex-post para probar el CAPM ex-ante

(iii) Se ha añadido un término de error

En definitiva, $r_{it} - r_{ft}$ no es más que el exceso de rdto del activo i (el cual debe ser igual a la beta multiplicada por el exceso de rdto del mercado)

♠ Validez del modelo CAPM

• Evidencia empírica no es concluyente:

Aunque los rendimientos promedio de los activos a largo plazo están significativamente relacionados con su **beta**, en los pasados 30 años se ha observado que:

(a) Acciones de empresas pequeñas han tenido rentabilidades significativamente mayores que lo que predice el modelo CAPM

(b) Acciones con bajos ratios precio/valor han tenido una rentabilidad significativamente mayor que lo que predice CAPM

(c) Después de ajustar por los dos factores **(a)** y **(b)**, la **beta** tiene poco poder explicativo de los rendimientos de una acción

→ Es decir, el CAPM parece no funcionar satisfactoriamente

→ Además, ¿cómo definir y medir la cartera de mercado *m*? Si utilizamos el índice de mercado equivocado, podemos llegar a resultados erróneos. En teoría, *m* debería incluir todas las inversiones arriesgadas (no sólo en acciones, sino también en bienes raíces, en capital humano,…). Pero en la práctica, hacer esto es difícil…

Por eso han surgido modelos alternativos como extensiones al CAPM:

- Consumption based CAPM o Consumption-CAPM (CCPAM)
- Canonical CAPM
- CAPM de Múltiples Factores
- CAPM Internacional
- Black-Scholes-Merton Option-Pricing Model

● Modelo APT

La Tª de Valoración por Arbitraje (Arbitrage Pricing Theory) fue formulada por Ross (1976) y supera muchas de las debilidades del CAPM, mediante la utilización de un modelo más general

❶ Se ha criticado al CAPM por basarse en la eficiencia de la **cartera de mercado**; el APT no necesita esa condición y utiliza el argumento del arbitraje: En eq, las carteras que supongan una inversión cero y que no tengan riesgo, deberán dar una rentabilidad cero; en caso contrario, los arbitrajistas invertirán en ellas hasta conseguir que este principio se mantenga → Estas carteras se denominan **carteras de arbitraje**

❷ El CAPM se basa en el modelo de mercado, que sostiene que la rentabilidad de un activo viene explicada por su relación lineal con un **único factor**, la rentabilidad del mercado; el APT introduce **más de un factor explicativo**

❸ CAPM y APT dan lugar a una ecuación de valoración de activos similar, existiendo una relación lineal entre rendimiento esperado del título y riesgo sistemático. Pero la definición de dicho riesgo sistemático es distinta en ambos modelos:

• En el CAPM, se define como el coeficiente **beta**, que es la pendiente en la regresión lineal entre la rentabilidad del título y la cartera de mercado

• En el APT, el riesgo sistemático viene dado por varias **betas**, que son los coeficientes de los factores del modelo factorial

❹ En ambos modelos se supone que existe un **riesgo diversificable** que no debe producir rentabilidad

● Modelo VaR (Value at Risk) (VaR paramétrico, VaR no paramétrico)

Invertir en un activo con rendimiento incierto supone asumir un riesgo. El riesgo de una inversión se puede medir de muchas formas, siendo una de las + habituales su **volatilidad** (varianza anualizada de los rendimientos, asumiendo normalidad de los mismos e independencia temporal) o su **Valor en Riesgo** (Value at Risk), que no es más que la pérdida económica probable de la inversión al final de un período

El VaR mide el riesgo que tiene un proyecto de inversión determinado: construye un indicador de la volatilidad de los flujos de caja de un proyecto (inversión) que complementa el VAN y permite priorizar proyectos según el riesgo total del proyecto

En particular, mide la exposición al riesgo para un determinado nivel de confianza, i.e., la cantidad máxima que se podría perder para ese nivel de confianza

$\Rightarrow$ compara riesgos en términos de pérdidas potenciales

Cuando existe más de una variable o factor (sup., dos: la variable 1 y la variable 2) que explica el riesgo de una inversión, es necesario calcular los riesgos de forma individual primero y, luego, es preciso considerar las interacciones de estas variables incorporando sus correlaciones para calcular el riesgo total

◆ Modelos de **heteroscedasticidad condicional autorregresiva** (arch, garch, arch-m)

Hasta ahora hemos definido el riesgo de un activo (la **beta**) a través del CAPM y hemos utilizado el modelo de regresión lineal simple

$$r_{it} = \alpha + \beta r_{mt} + \varepsilon_{it}$$

$$r_{it} - r_{ft} = \beta(r_{mt} - r_{ft}) + \varepsilon_{it}$$

para estimar empíricamente la línea característica del mercado como medida del riesgo y la beta (CAPM)

Ojo: la beta que se estima mediante esta regresión lineal simple se hace suponiendo que:

el rdto en exceso de la acción, analizado como una serie temporal, tiene **varianza condicional homoscedástica**

Por el supuesto ④, resulta $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma^2$ para todos los valores de *i*. Como además se supone por la condición ② que la media de ε_{it} es 0 $\Rightarrow$ podemos escribir $Var(\varepsilon_{it}) = \sigma^2$

La varianza de la perturbación es constante en todas las observaciones: **varianza condicional homoscedástica** (varianza constante en el tiempo)

<u>Evidencia empírica:</u>

El valor de las acciones, opciones y otros activos inciertos varía aleatoriamente en el tiempo en función del riesgo (grado de fluctuación que se conoce como **volatilidad**) y la **volatilidad** cambia a lo largo del tiempo: hay períodos turbulentos con grandes y rápidos cambios, seguidos por otros períodos de calma con pocas fluctuaciones. Los métodos estadísticos tradicionales (CAPM) suponen una volatilidad constante!

Dicho de forma alternativa, las variables que influyen en el precio del riesgo no son analizadas en el contexto de series temporales

IDEA: Construir modelos en los que una variable es explicada utilizando exclusivamente una "exógena": su propio pasado (utilizar exclusivamente los valores pasados de una variable para explicar su evolución presente y futura). En lugar de especificar el modelo, dejar que los propios datos temporales de la variable indiquen las características de la estructura probabilística subyacente

El supuesto de homoscedasticidad implica que el modelo presenta debilidades estructurales que dificultan su validez empírica

El modelo apropiado debería incluir perturbaciones heteroscedásticas: varianza condicional variable en las series, $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_{it}^2$. **Que la varianza de la perturbación pueda variar de una observación a otra**

Definición: Un modelo es AR (autorregresivo) si la variable endógena de un periodo t es explicada por las observaciones de dicha variable en periodos anteriores, añadiéndose como en los modelos estructurales, un término de error aleatorio

En el caso de procesos estacionarios con distribución normal, bajo determinadas condiciones, el valor de una variable en el periodo *t* puede expresarse como una combinación lineal de sus valores pasados (**parte sistemática**) más un término de error (**innovación**)

OBJETIVO de esta teoría econométrico-financiera: Modelizar series temporales financieras para averiguar el efecto que esta conducta de la varianza tiene en las propiedades de los estimadores mínimocuadráticos de los coeficientes de la regresión

Concretamente:

Analizar la media condicional con modelos ARIMA (Modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles) y modelizar los residuos del modelo ARIMA (la varianza condicional) con modelos ARCH, GARCH, ARCH-m, etc.

Todos estos modelos forman parte de la familia de modelos de **heteroscedasticidad condicional autorregresiva**

Los dos primeros estudian la varianza condicional variable en el tiempo a partir de relaciones de variables conocidas de periodos rezagados. En particular,

◆ Modelo ARCH

Engle (1982), con su concepto de la **heterocedasticidad autoregresiva condicional** *(autoregressive conditional heteroskedasticity*, ARCH), describió las propiedades de muchas series temporales y desarrolló métodos para construir modelos explicativos de las variaciones de volatilidad a lo largo del tiempo

Expresa la varianza condicional como función lineal del cuadrado de las innovaciones rezagadas

◆ Modelo GARCH (Bollerslev, 1986)

Bollerslev (1986) extendió el trabajo de Engle, desarrollando técnicas que permiten que la varianza condicional siga un proceso autorregresivo de medias móviles (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, GARCH). El modelo más sencillo es el GARCH(1,1)
(El primer índice entre paréntesis hace referencia al número de retardos de desviación respecto al promedio incorporados en la ecuación, y el segundo al número de retardos de varianza)

En general, el GARCH(p,q) expresa la varianza condicional por medio de las innovaciones y de la varianza retrasada varios periodos

◆ Modelo ARCH-m (Engle, Lilien y Robins, 1987)

Es una extensión del modelo arch y del modelo garch, pero principalmente se utiliza en la valoración del precio de activos. Supone que el grado de incertidumbre en el rdto de un activo varía en el tiempo, y por tanto la compensación que requieren los inversores para invertir también debe variar.

Modelo arch-m: hace depender la media condicional de la varianza condicional. En este sentido, la varianza condicional afecta al rdto esperado del portfolio. Además, la varianza condicional se utiliza como un regresor en aquellos modelos que estudian el riesgo