☆ El comportamiento de la empresa bajo incertidumbre (de precios)

El modelo:

① Una empresa "competitiva" que produce el nivel de output q

② Función de costes de producir q es $C(q) = F + c(q)$; F coste fijo y $c(q)$ coste variable

③ El coste marginal es no-decreciente, $\dfrac{\partial^2 C(q)}{\partial q^2} = c''(q) \geq 0$, (función convexa)

④ Condición ③ implica que $\pi(q) = pq - F - c(q)$ es cóncava

⑤ Incertidumbre

Proviene del hecho de que la empresa decide q antes de conocer p

Sup no incertidumbre tecnológica (la empresa conoce el proceso productivo y el coste de cada nivel de producción q que obtiene), pero sí en el **nivel de demanda**: la empresa, cuando decide q, desconoce el precio unitario que "se formará" en el mdo. [v.gr., función de demanda $p(Q) = A - Q + \varepsilon$, con ε v.a.] $\Rightarrow$ $\tilde{p}$ v.a. de la que conoce la distribución:

⑥ Para simplificar, sup. sólo dos posibles precios, p_1, p_2, $p_1 < p_2$ (dos estados: malo y bueno), con probabilidades γ y $1-\gamma$, resp. La esperanza de esta distribución (de precios) es $E[\tilde{p}] \equiv \bar{p} = \gamma p_1 + (1-\gamma) p_2$.

$$\text{B}^{\text{o}} \text{ final de la empresa: } \begin{cases} \pi_1 = p_1 q - [c(q) + F], \text{ con prob } \gamma \quad \text{(estado malo)} \\ \pi_2 = p_2 q - [c(q) + F], \text{ con prob } 1-\gamma \text{ (estado bueno)} \end{cases}$$

⑦ (Para evitar soluciones de esquina del tipo q=0) Sup que $E[\tilde{\pi}] = \gamma\pi_1 + (1-\gamma)\pi_2 > 0$, lo cual implica que para q=0, $\bar{p} > c'(q)$

☒ Decisión óptima de la empresa: Producir q^* tal que

$$q^* = \arg\max_q E[u(\pi(q))] = \gamma u(\pi_1) + (1-\gamma)u(\pi_2) \qquad (1)$$

CPO:

$$0 = \frac{dE[u(\pi)]}{dq} = \gamma u'(\pi_1)[p_1 - c'(q)] + (1-\gamma)u'(\pi_2)[p_2 - c'(q)] \qquad (2)$$

y dado que $0 < \gamma < 1$ y $u'(\cdot) > 0$, en (2) $(p_1 - c'(q))$ y $(p_2 - c'(q))$ han de tener signo opuesto necesariamente. Como $p_1 < p_2$, $(p_1 - c'(q)) < 0$ y $(p_2 - c'(q)) > 0$

Proposición. El valor óptimo q^* en incertidumbre es tal que $p_1 < c'(q^*) < p_2$.

El output de la empresa en incertidumbre, q^*, es mayor (resp., menor) que el que elegiría si supiese con certeza que el precio va a ser p_1 (resp., p_2)

$\Rightarrow$

Proposición. Si la empresa es aversa al riesgo, q^* es inferior al que elegiría si se le garantizase un precio $\overline{p}$.

Demo. Si $\overline{q}$ es el output producido cuando $\overline{p}$ es el precio seguro, $\overline{q}$ es el valor que resuelve $\max\limits_{q} u(\overline{p}q - c(q) - F)$, lo cual equivale a

$$\max_{q} \overline{p}q - c(q) - F, \tag{3}$$

ya que $u'(\pi)$ es una transformación monótona creciente de la riqueza (o bº) final, $u'(\pi) > 0$. Por lo tanto, de la CPO (3) resulta $\overline{p} = c'(\overline{q})$. Nos queda por demostrar que $q^{*} < \overline{q}$: (2) se puede reescribir como

$$\gamma p_1 u'(\pi_1) + (1-\gamma) p_2 u'(\pi_2) - c'(q)[\gamma u'(\pi_1) + (1-\gamma) u'(\pi_2)] = 0, \tag{4}$$

donde la suma de los dos primeros términos del LHS es la esperanza de un producto de v.a., $\tilde{p} \equiv (p_1, p_2; \gamma, 1-\gamma)$ y $\tilde{u}' \equiv (u'(\pi_1), u'(\pi_2); \gamma, 1-\gamma)$. Utilizando la definición de covarianza,

$$Cov(\tilde{p}, \tilde{u}') = \gamma(p_1 - \overline{p})[u'(\pi_1) - \overline{u}'] + (1-\gamma)(p_2 - \overline{p})[u'(\pi_2) - \overline{u}'],$$

(4) se reescribe como

$$\overline{p}[\gamma u'(\pi_1) + (1-\gamma)u'(\pi_2)] + \mathrm{cov}(\tilde{p}, \tilde{u}') = c'(q)[\gamma u'(\pi_1) + (1-\gamma)u'(\pi_2)], \tag{5}$$

donde el término entre corchetes de ambos lados es la esperanza de la *UMa*, $E[u'(\tilde{\pi})] \equiv \overline{u}'$. Dividiendo en ambos lados de (5) por $E[u'(\tilde{\pi})]$, resulta

$$\overline{p} + \frac{\mathrm{cov}(\tilde{p}, \tilde{u}')}{E[u'(\tilde{\pi})]} = c'(q) \tag{6}$$

que caracteriza el óptimo de la empresa en incertidumbre. La diferencia entre (6) y la condición de óptimo en certidumbre es

$$\frac{\mathrm{cov}(\tilde{p},\tilde{u}')}{E[u'(\tilde{\pi})]}$$

• Si la empresa es aversa al riesgo, $\dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{p},\tilde{u}')}{E[u'(\tilde{\pi})]} < 0$ (denominador>0 y numerador<0, ya que cuando $p\uparrow$, la riqueza (bº) final $\uparrow$ y la *UMa* de la riqueza o bº $u'(\pi)\downarrow$ $(u''(\pi) < 0)$; hay, pues, una relación inversa entre p y u' lo que implica una cov negativa.

El que $\dfrac{\operatorname{cov}(\tilde{p},\tilde{u}')}{E[u'(\tilde{\pi})]} < 0$ se puede interpretar como el *CMa* del riesgo: El precio percibido por la empresa aversa al riesgo es, pues, igual a $\overline{p}$ menos un término positivo (y, de acuerdo con una curva de *CMa* creciente, a este precio "neto" inferior le corresponde una producción menor), $q^* < \overline{q}$.

• Si la empresa es neutral al riesgo, $u'(\pi)$ es cte ($u''(\pi) = 0$), y por lo tanto $\operatorname{cov}(\tilde{p},\tilde{u}') = 0 \Rightarrow q^* = \overline{q}$. La empresa se comporta como si supiese con seguridad que el precio será $\overline{p}$ (al ser neutral al riesgo, ignora el carácter aleatorio de $\tilde{p}$).

• Si la empresa es amante del riesgo,… ■

◇ **Caso general (no nos limitamos a considerar dos estados sólo)**

El modelo:

Todo igual que antes, con la hipótesis de:

⑥ p es una v.a., $\tilde{p}$, de la que la empresa sólo conoce su F.d., $F(\tilde{p})$, siendo $E(\tilde{p}) = \bar{p}$

★ Función objetivo de la empresa → la utilidad esperada de su bº, $E[u(\pi(q))]$, siendo $u(\pi(q))$ una función cóncava (empresa aversa al riesgo)

★ Problema de la empresa → elegir q tal que $\max E[u(\pi(q))]$

CPO:

$$E[u'(\pi(q)\cdot p)] = c'(q)\cdot E[u'(\pi(q))] \tag{7}$$

Como u es cóncava $\Rightarrow$ $u'(\pi(q))$ es decreciente en q y, por tanto, en *p*; y como $\pi(p)$ es creciente en p $\Rightarrow$ $E[u'(\pi(q)(p-\overline{p})] < 0$, por lo que restando en ambos lados de (7), $\overline{p}\cdot E[u'(\pi)]$, resulta

$$(c'(q)-\overline{p})E[u'(\pi(q)] = E[u'(\pi(q))(p-\overline{p})] < 0 \tag{8}$$

de donde se obtiene

$$c'(q) < \overline{p} \tag{9}$$

El nivel de output q a producir es el nivel para el cual el *CMa* de producirlo es inferior al precio esperado

Dado que:

(a) En certidumbre se cumple (9) con igualdad y

(b) El *CMa* es creciente,

$\Rightarrow$ el nivel de producción (esperado) de una empresa aversa al riesgo es menor en incertidumbre que el nivel (cierto) en certidumbre

♦ Hacer para empresas neutrales al riesgo…

☒ Estática comparativa

1. Variación de los costes fijos F

<u>En certidumbre:</u> En el corto plazo, F no juega papel alguno en la decisión sobre el nivel óptimo de output (ver CPO del Programa 1,5 en Cap. 2!). [En el largo plazo, sí (Por qué?)] Alternativamente, para una empresa multiplanta, la distribución de los CF entre las diversas plantas es irrelevante.

<u>En incertidumbre:</u> Este resultado se relativiza. La empresa aversa al riesgo se preocupa, antes de elegir el output, de los CF, incluso en el corto plazo.

Proposición. Un $\uparrow F \downarrow$ la producción de equilibrio q^* si la empresa tiene aversión absoluta al riesgo (AAR) decreciente. Si es creciente, sucede lo contrario.

Demo. El bº (o riqueza) final de la empresa $\downarrow$ si $\uparrow F$:

- Si $\uparrow F \Rightarrow \downarrow \pi_f$, y si la AAR de la empresa $\downarrow$ con la riqueza (o bº), un $\uparrow$ F hace que la empresa sea más aversa. Para asumir menos riesgo, la empresa $\downarrow$ q en el c/p (En efecto, producir menos implica asumir menor riesgo, ya que

$$
\begin{aligned}
Var[\tilde{\pi}_f] &= Var[\tilde{p} \cdot q - F - c(q)] \\
&= q^2\, Var[\tilde{p}]\ ) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

- Si la AAR es creciente, entonces a medida que $\downarrow \pi_f$ que obtiene, su grado de aversión será menor y, por tanto, la diferencia entre el output con incertidumbre y el output sin incertidumbre también será menor. Como un $\uparrow F$ empeora el resultado de la empresa, hace que ésta tenga menor aversión al riesgo lo cual lleva a un $\uparrow$ q. ■

Excepciones:

- Si la AAR de la empresa es <u>constante</u>, entonces un $\uparrow F$ no modifica q
- La existencia conjunta de incertidumbre y de mdos de futuros elimina el papel de los CF, cualquiera que sea el tipo de f.u. de la empresa

2. $\uparrow$ de p_1 (o de p_2)

Un $\uparrow p_1$: • $\uparrow \bar{p}$

• $\downarrow Var(\tilde{p})$

• Resultado (beneficio final) en el estado malo es mejor

$\Rightarrow \uparrow q^*$

Un $\uparrow p_2$ ... COMPLETAR

3. Variación del riesgo

Una mayor dispersión (volatilidad) manteniéndose $\overline{p}$ constante puede implicar $\downarrow q^*$ o no

Demo. Consideremos dos distribuciones de precios (no 2 estados!), p_1 y p_2, y sup. que la distribución de p_1 es más arriesgada que la de p_2: ambas tienen la misma media, pero la varianza de p_1 es mayor:

$$E(p_1) = E(p_2) = \overline{p}, \qquad \sigma^2_{p_1} > \sigma^2_{p_2}$$

Un $\uparrow$ del riesgo no implica necesariamente $\downarrow$ del output de equilibrio. Para que ello ocurra, es preciso que

$$E_1[u'(\pi(q))] - E_2[u'(\pi(q))] < 0 \tag{8}$$

donde los subíndices indican la distribución de precios correspondiente. En efecto, si $E_1[u'(\pi(q))] - E_2[u'(\pi(q))] < 0$ entonces $q_1 < q_2$ por la concavidad de $E[u(\pi(q))]$: (En lugar de $\pi(q)$ escribimos simplemente π)

$$\begin{aligned} E_1[u'(\pi)] - E_2[u'(\pi)] &= E_1[\overline{p}u'(\pi)] - E_2[\overline{p}u'(\pi)] - c'(q)\{E_1[u'(\pi)] - E_2[u'(\pi)]\} \\ &= \frac{1}{q}\{E_1[u'(\pi)] - E_2[u'(\pi)]\} + \left[\frac{C(q)}{q} - c'(q)\right]\{E_1[u'(\pi)] - E_2[u'(\pi)]\} \end{aligned}$$

$$\leq \left[\frac{C(q)}{q} - c'(q) \right] \{E_1[u'(\pi)] - E_2[u'(\pi)]\} \tag{9}$$

Y para que (9) sea negativa, es claro que si el *CMa* es mayor (menor) que el *CMe*, la función $u'(\pi)$ debe ser convexa (cóncava). Es decir, el resultado depende del signo de la 3ª derivada de la función $u(\pi)$ (la valoración que hace la empresa de los beneficios) y por tanto del carácter creciente o decreciente de la AAR con el nivel de bº.

♦ El valor de la información

• Cuánto estaría dispuesta a pagar la empresa por conocer el valor del p?

Consideremos una empresa y un asesor en cuya predicción la empresa confía plenamente. Si el asesor revela que el precio será p_1, la empresa resuelve

$$\max u(p_1 q_1 - c(q_1) - F) \tag{10}$$

i.e.,

$$\max\ p_1 q_1 - c(q_1) - F \tag{11}$$

$\Rightarrow q_1$ es tal que $p_1 = c'(q_1)$, con lo cual $\pi^*_{f1} = p_1 q_1^* - c(q_1^*) - F$

Si el precio anunciado es p_2, entonces $\pi^*_{f2} = p_2 q_2^* - c(q_2^*) - F$

Qué sucede?

Por el hecho de acudir al experto, la incertidumbre sobre p no se elimina; lo que sí cambia es la forma de elegir q: sin la info, q se determina de forma única (es la q^* del apartado anterior); con la info, se decide entre q_1^* y q_2^*, en función del consejo del asesor.

Antes de consultar, la empresa está en incertidumbre $\Rightarrow$ evaluará su situación en términos de utilidad esperada.

☆ Con info,

$$Eu_I = \gamma u(\pi^*_{f1}) + (1-\gamma)u(\pi^*_{f2}) \tag{12}$$

☆ Sin info,

$$Eu_{NI} = \gamma u(p_1 q^* - c(q^*) - F) + (1-\gamma)u(p_2 q^* - c(q^*) - F) \tag{13}$$

y sucede que

$\pi^*_{f1} > p_1 q^* - c(q^*) - F + (1-\gamma)u(p_2 q^* - c(q^*) - F)$, porque q^* no es óptimo para un p_1 cierto (14)

$$\pi^{*}_{f2} > p_2 q^{*} - c(q^{*}) - F \text{, porque } q^{*} \text{ no es óptimo para un } p_2 \text{ cierto} \tag{15}$$

Entonces, $Eu_I > Eu_{NI} \Rightarrow$ LA INFO TIENE VALOR

Para determinar su valor exacto, V, basta con plantear la condición

$$\gamma u(\pi^{*}_{f1} - V) + (1-\gamma) u(\pi^{*}_{f2} - V) = Eu_{NI} \tag{16}$$

Si resolvemos en V, se obtiene la cantidad max que la empresa está dispuesta a pagar para tener acceso a la info perfecta sobre $\tilde{p}$.

Plantear un ejercicio numérico concreto y resolver en V

★ La existencia de mercados de futuros (MF)

Existen mecanismos (instituciones) para corregir algunos de los problemas causados por la incertidumbre (seguros, mercados bursátiles, etc.). Uno de los más conocidos es la presencia de MF para ciertos productos agrícolas e industriales.

Precios en los mercados al contado (MC) (spot markets) son extremadamente volátiles vs MF (future markets), donde no hay incertidumbre

MF son una institución útil para las empresas aversas al riesgo porque gracias a ellos toman la decisión de producción en incertidumbre COMO SI estuviesen en un contexto de certidumbre! EJEMPLO: en el sector eléctrico, en el que los MF son utilizados como un mecanismo para luchar contra el riesgo.

☐ La empresa determina q ignorando el p que existirá en el momento de vender el producto

☐ El p es una v.a. con soporte dual

☐ Pero sup que el producto puede ser vendido (en un MF) a un p conocido de antemano, p_f ($\Rightarrow$ en el MF no existe riesgo)

☐ Si q_f es la cantidad colocada en el MF, q-q_f será la vendida a través del MC

▪ Si q-q_f>0, la empresa lleva al MF una parte de su output (es vendedor en el MC)

▪ Si q-q_f<0, vende en el MF una cantidad superior a la producida ($\rightarrow$ al vencimiento del contrato, se convertirá en comprador (dejando de ser vendedor) en el MC)

Problema de la empresa es

$$\max_{q,q_f} Eu = \gamma u(p_f q_f + p_1(q-q_f) - c(q) - F) + (1-\gamma)u(p_f q_f + p_2(q-q_f) - c(q) - F) \tag{17}$$

CPO:

$$0 = \frac{\partial Eu}{\partial q_f} = \gamma u'(\pi_1)(p_f - p_1) + (1-\gamma)u'(\pi_2)(p_f - p_2) \tag{18}$$

$$0 = \frac{\partial Eu}{\partial q} = \gamma u'(\pi_1)(p_1 - c'(q)) + (1-\gamma)u'(\pi_2)(p_2 - c'(q)) \tag{19}$$

donde π_1 y π_2 son los valores de la riqueza o bº final de la empresa en cada estado.

Proposición. $p_1 < p_f < p_2$ para que exista una solución finita al problema (17)

Demo. Si $p_f < p_1$ (y tb a p_2), entonces (18) se convierte en $\frac{\partial Eu}{\partial q_f} < 0$ y la empresa tiene incentivo a $\downarrow q_f$ y a que sea lo más negativo posible (la empresa realizaría sin límite compras aplazadas): compraría en el MF y revendería en el MC obteniendo con ello un bº

Si $p_f > p_2$ (y tb a p_1), (18) se convierte en $\frac{\partial Eu}{\partial q_f} > 0$ (y la empresa puede comprar en el MC a un p inferior al que vende en el MF). Como ésta es una operación sin riesgo alguno que conlleva bº, la empresa tendría incentivo a desarrollar sin límite sus ventas aplazadas

$\Rightarrow$ Para que las ventas (aplazadas) en el MF adopten un valor finito, es necesario que la empresa (sea vendedor en el MF) soporte un riesgo, lo cual sucede si $p_1 < p_f < p_2$. ■

Las condiciones (18)-(19) permiten obtener q y q_f, pero como son no-lineales, su resolución puede resultar complicada. Si las reescribimos como

$$p_f[\gamma u'(\pi_1) + (1-\gamma)u'(\pi_2)] = \gamma p_1 u'(\pi_1) + (1-\gamma) p_2 u'(\pi_2) \tag{18a}$$

$$c'(q)[\gamma u'(\pi_1) + (1-\gamma)u'(\pi_2)] = \gamma p_1 u'(\pi_1) + (1-\gamma) p_2 u'(\pi_2) \tag{19a}$$

se obtiene $p_f = c'(q)$.

Gracias al MF la empresa toma la decisión de producción bajo incertidumbre como si estuviese en un contexto de certeza

Es decir, el precio del MF es una guía perfecta para orientar las decisiones sobre q hasta el punto de que q^* debe ser tal que

$c'(q^*) = p_f$ (conocido con certeza!)

$\Rightarrow$ el riesgo sobre el precio corriente no tiene por qué afectar a una empresa aversa al riesgo en el momento de decidir q; sólo le afecta cuando "reparte" q entre la cantidad que lleva al MC y la que lleva al MF

Proposición. Existe "separación" entre ambas decisiones de la empresa; primero, fija q sobre la base de p_f, y, después, determina q_f que verifica (17).

Qué papel juegan los CF en este contexto? Un $\uparrow F$ afecta a q?, a la partición de q entre ambos mercados?, a cada una de las dos decisiones? (Suponer que la empresa tiene AAR decreciente)

Ejemplo numérico

Una empresa con f.u.e. $u(\pi) = \ln \pi$ produce un bien con una función de costes $c(q) = 20q$. Su capacidad instalada (máxima) es de 50 unidades. El p es incierto: cree que con prob 0,5 será p_1=10 (estado malo) y que con prob 0,5 será p_2=40 (estado bueno). La riqueza inicial de la empresa es w_0=1100 y F=100. Determinar la producción óptima de esta empresa.

Resolución

$$\max_q E[u(\pi)] = \frac{1}{2}\ln[1100 + (10-20)q - 100] + \frac{1}{2}\ln[1100 + (40-20)q - 100]$$

CPO

$$-\frac{1}{2}\frac{10}{1000-10q} + \frac{1}{2}\frac{20}{1000+20q} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^* = 25$$

- Sup ahora que la empresa sabe que el precio (garantizado o cierto) es el precio medio $\overline{p} = 25$. En este caso, $\overline{q} = 50$ y bº es: $50(25-20) - 100 = 150$

- Si los $F\uparrow$ a 200, la CPO se convierte en

$$-\frac{1}{2}\frac{10}{900-10q}+\frac{1}{2}\frac{20}{900+20q}=0 \quad \Rightarrow \quad q^{*}=22{,}5$$

Una empresa con AAR decreciente (véase la f.u. logarítmica!) ↓q al ↑F.

- Consideremos ahora que la empresa consigue colocar todo o parte de su output en un MF, donde prevalece un p_f=22. Qué hará la empresa?

Producirá el máximo nivel posible q=50, ya que la producción q está determinada por el p del MF que es mayor que el CMa, de modo que es rentable producir lo máximo posible. Una vez determinado el nivel de producción, decide la cantidad a vender en el MF, q_f, y en el MC, $q-q_f$. Utilidad esperada es

$$q_f = \arg\max E[u] = \frac{1}{2}\ln[1100 + 22q_f + 10(50 - q_f) - 1000 - 100] + \frac{1}{2}\ln[1000 + 22q_f + 40(50 - q_f) - 1000 - 100]$$

y la CPO da lugar a $q_f = 36{,}11$. La empresa vende $q_f = 36{,}11$ unidades en el MF y el resto, $q - q_f = 13{,}89$, en el MC.

(Comprobar que esta cantidad ↓ si *F* superan el nivel de 200.)

✍ Repetir el ejercicio anterior suponiendo que la riqueza inicial de la empresa es w_0=0.