Introducción

En el modelo de riesgo moral, el principal no observa las acciones tomadas por el agente durante el desarrollo de la relación contractual. Por ejemplo, si el agente puede ejercer varios niveles de esfuerzo distintos, con riesgo moral el principal no sabe cuál de ellos lleva a cabo; sólo puede observar el resultado obtenido por el agente.

Dada esta asimetría informacional durante la relación contractual, dos cosas tienen lugar. En primer lugar, el nivel de esfuerzo del agente (no verificable por el principal) no puede entrar como cláusula del contrato entre el principal y el agente. El contrato será una lista de pagos

$$\mathbf{c} = (w_1, \ldots, w_n)$$

que indica el reparto de cada nivel de excedente x_i posible (w_i para el agente, $x_i - w_i$ para el principal). En segundo lugar, el agente elige libremente el nivel de esfuerzo que desea ejercer durante la relación contractual. Por lo tanto, cuando el principal propone el contrato $\mathbf{c} = (w_1, \ldots, w_n)$, ha de tener en cuenta la decisión sobre el nivel de esfuerzo (no observable para él) que el agente adoptará si acepta el contrato. Esto significa que el principal sólo puede controlar indirectamente el nivel de esfuerzo (del agente) mediante los pagos que propone en el contrato que diseña y le ofrece al agente. En consecuencia, el contrato óptimo, con riesgo moral, debe conciliar dos aspectos:

- la eficiencia, en forma de reparto óptimo del riesgo entre las partes, y
- la provisión adecuada de incentivos al agente.

Formalmente, si $E\Pi(f(e), \mathbf{c})$ es el beneficio esperado del principal, el contrato óptimo es el que resulta de resolver el programa de optimización

$$\max_{(e, w_1, \ldots, w_n)} E\Pi(f(e), \mathbf{c}), \text{s.a.} \begin{cases} Eu(f(e), \mathbf{c}) - v(e) \geq \underline{U} & \text{(RP)} \\ e \in \arg\max_{\overline{e}} \{Eu(f(e), \mathbf{c}) - v(e)\} & \text{(CI)} \end{cases}$$

donde $v(e)$ es la desutilidad del esfuerzo para el agente. La restricción de incentivos (CI) refleja la libertad de elección que tiene el agente respecto al nivel de esfuerzo desempeñado (acción oculta para el principal). Dada esta libertad de decisión, para cada contrato $\mathbf{c}$ propuesto por el principal, el agente elige el esfuerzo que maximiza su utilidad neta, $Eu(f(e), \mathbf{c}) - v(e)$. Esta maximización es lo que refleja la CI. El principal, cuando la información es asimétrica, diseña el contrato para inducir indirectamente, a través de la decisión egoista del agente, el nivel de esfuerzo que le conviene (y paliar así la imposibilidad de ponerse de acuerdo sobre un nivel de esfuerzo directamente en el propio contrato). El contrato $\mathbf{c}$ provee, pues, incentivos pensados para incidir en la decisión del agente sobre el nivel de esfuerzo e.

El modelo con dos niveles de esfuerzo

Supongamos que el agente puede elegir realizar un nivel de esfuerzo de entre dos posibles, e^H y e^L. El nivel e^H representa la situación en la que el agente trabaja duro, mientras que e^L se refiere a un nivel bajo de esfuerzo. Además, $v(e^H) > v(e^L)$, i.e. proveer el esfuerzo e^H es más costoso para el agente, en términos de desutilidad, que realizar el esfuerzo e^L.

Si el principal quiere inducir la elección de e^L por parte del agente, basta con proponer un contrato formado por un pago fijo $w^{\min}$ que sature la RP, i.e.

$$w^{\min} = u^{-1}(\underline{U} + v(e^L)).$$

En este caso, no existe problema de riesgo moral y llegamos al siguiente resultado.

Proposition *Para inducir e^L, el principal ha de pagar al agente una cantidad fija igual a la que pagaría con información simétrica para garantizarle a éste la utilidad de reserva $\underline{U}$.*

Proof Con el pago $w^{\min}$, tenemos

$$u(w^{\min}) - v(e^L) \geq u(w^{\min}) - v(e^H)$$

y se cumple trivialmente la restricción CI que garantiza que, ante el pago fijo $w^{\min}$, el agente efectivamente elige e^L y no e^H.

Supongamos ahora que el principal quiere implementar e^H. En este caso, ya no sirve un pago fijo como antes, ni $w^{\min}$ ni cualquier otro pago fijo $w > w^{\min}$, ya que

$$u(w) - v(e^H) < u(w) - v(e^L)$$

y no se verifica CI.

Si el contrato propuesto por el principal es $\mathbf{c} = (w_1, \ldots, w_n)$, la restricción CI que garantiza que el agente elegirá e^H para la modalidad de reparto de los excedentes estipulada en $\mathbf{c}$ es

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e^H) u(w_i) - v(e^H) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i(e^L) u(w_i) - v(e^L),$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} [p_i^H - p_i^L] u(w_i) \geq v(e^H) - v(e^L),$$

donde $p_i(e^H) = p_i^H$ (probabilidad de obtener el resultado i habiendo hecho el esfuerzo e^H) y $p_i(e^L) = p_i^L$ (probabilidad de obtener el resultado i habiendo realizado e^L). Es decir, el agente elige e^H cuando la esperanza de ganancia de utilidad asociada a este esfuerzo compensa el sobrecoste correspondiente.

El problema del principal a la hora de inducir e^H es:

$$\max_{(w_1,\ldots,w_n)} \sum_{i=1}^{n} p_i^H(e) \cdot \Pi(x_i - w_i), \text{s.a.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i^H \cdot u(w_i) - v(e) \geq \underline{U} & \text{(RP)} \\ \sum_{i=1}^{n} [p_i^H - p_i^L] u(w_i) \geq v(e^H) - v(e^L) & \text{(CI)} \end{cases} \qquad \#$$

Ordenemos de peor a mejor los excedentes posibles, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (i.e. el resultado 1 es el peor de todos y el n es el mejor de todos). Sabemos que cada nivel de esfuerzo e genera una distribución de probabilidades $p_1(e), \ldots, p_n(e)$ sobre el excedente obtenido, siendo $p_1(e) = \Pr(x = x_1 \mid e), \ldots, p_n(e) = \Pr(x = x_n \mid e)$. Supongamos también que al aumentar el nivel de esfuerzo aumenta (estocásticamente) el valor del resultado o excedente obtenido o, de manera alternativa, disminuye la probabilidad de conseguir los peores niveles del excedente. Formalmente,

Hipótesis: (Dominancia estocástica de primer orden)

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^H < \sum_{i=1}^{k} p_i^L, \text{ para } k = 1, \ldots, n-1.$$

Es decir, la probabilidad de obtener un excedente malo (inferior o igual al resultado x_k) es menor con el esfuerzo e^H que con el esfuerzo e^L. Pues bien, cuando las desigualdades anteriores se cumplen, decimos que $p_1^H, \ldots, p_n^H$ domina estocásticamente a $p_1^L, \ldots, p_n^L$.

Example *Si los resultados posibles son dos, $x_1 < x_2$, y la matriz de probabilidades es*

	e^H	e^L
$p_1(e)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_2(e)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

es claro que $p_1^H < p_1^L$ (recordemos que el resultado x_1 es el resultado malo), con lo cual p_1^H, p_2^H domina estocásticamente a p_1^L, p_2^L. □

El lagrangiano del problema (ref: p1) es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(w_1, \ldots, w_n, \lambda, \mu) = & \sum_{i=1}^{n} p_i^H(e) \cdot \Pi(x_i - w_i) \\ & + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^H \cdot u(w_i) - v(e) - \underline{U}\right) \\ & + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} [p_i^H - p_i^L] u(w_i) - v(e^H) + v(e^L)\right)\end{aligned}$$

y las CPO respecto al salario w_i son:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = -p_i^H \Pi'(x_i - w_i) + \lambda p_i^H u'(w_i) + \mu[p_i^H - p_i^L] u'(w_i), i = 1, \ldots, n.$$

En lo que sigue supondremos que el principal es neutral al riesgo, i.e. $\Pi(x_i - w_i)$ es una función lineal del tipo $\Pi(x_i - w_i) = x_i - w_i$, o similar, con lo cual $\Pi'(\cdot) = 1$, mientras que el agente es averso al riesgo. En estas condiciones,

$$\frac{p_i^H}{u'(w_i)} = \lambda p_i^H + \mu[p_i^H - p_i^L], i = 1, \ldots, n \qquad \#$$

y sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$ (y teniendo en cuenta además que $\sum_{i=1}^{n} p_i^H = \sum_{i=1}^{n} p_i^L = 1$), resulta

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^H}{u'(w_i)} > 0.$$

Por lo tanto, dado que $\lambda > 0$, la RP está saturada, $\sum_{i=1}^{n} p_i^H u(w_i) - v(e) - \underline{U} = 0$. Dividiendo la CPO (ref: p2) por p_i^H, obtenemos

$$\frac{1}{u'(w_i)} = \lambda + \mu[1 - \frac{p_i^L}{p_i^H}], i = 1, \ldots, n. \qquad \#$$

Para demostrar que la CI también está saturada, basta con verificar que $\mu \neq 0$. Supongamos lo contrario; que $\mu = 0$. Entonces, (ref: p3) implica $u'(w_1) = \ldots = u'(w_n) = \frac{1}{\lambda}$, lo cual significa que el pago recibido por el agente es constante, $w_1 = \ldots = w_n = w$. Pero entonces la restricción CI se transforma en

$$u(w)\sum_{i=1}^{n}[p_i^H - p_i^L] - v(e^H) + v(e^L) \geq 0,$$

lo cual implica que

$$u(w)\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^H - \sum_{i=1}^{n} p_i^L]\right] - v(e^H) + v(e^L) = u(w)[1-1] - v(e^H) + v(e^L)$$
$$= -v(e^H) + v(e^L) \geq 0,$$

i.e.

$$v(e^L) \geq v(e^H),$$

lo cual no es posible. En consecuencia, $\mu \neq 0$ y la CI también está saturada. Podemos probar, además, que, en particular, $\mu > 0$, lo cual significa que la existencia de un problema de riesgo moral tiene un coste estrictamente positivo para el principal: el beneficio que éste obtiene con información asimétrica es estrictamente menor que con información simétrica.

Dado que $\mu > 0$, la condición (ref: p3) se puede reescribir como

$$u'(w_i) = \frac{1}{\lambda + \mu[1 - \frac{p_i^L}{p_i^H}]} \qquad \#$$

e implica que los pagos al agente no son constantes, sino que varían en función del resultado. Esta indexación de los pagos al resultado sirve para proveer incentivos adecuados al agente a elegir e^H.

Dado que el agente es averso al riesgo, $u(\bullet)$ es cóncava, i.e. $u'' < 0$, lo cual implica que u' es una función decreciente de w. Como $\mu > 0$, (ref: p4) implica que w_i decrece con el valor del cociente de verosimilitud $\frac{p_i^L}{p_i^H}$.

Example ***(Relación entre un terrateniente y un campesino)*** *Consideremos dos matrices de probabilidad distintas (vinculadas al nivel de esfuerzo) que corresponden, por ejemplo, a dos tipos de cultivo distintos....*

Aplicaciones

Las situaciones en las que la modalidad de información asimétrica en la relación contractual es el riesgo moral son muy frecuentes: compañías de seguros y clientes, bancos y prestatarios, empleador y empleado, accionistas de una empresa y directivos, actividades de prestación de servicios cuando el nivel de esfuerzo del prestatario afecta a la calidad del servicio prestado (mecánico y cliente, médico y paciente, profesor y alumno,...), etc.

Cuando existe riesgo moral, incluso si el principal es neutral al riesgo (y el agente averso), el principal no tiene incentivo a cargar con todo el riesgo asociado a la relación porque en ese caso el agente elegiría egoistamente la acción que le supone menor esfuerzo y que, generalmente, no coincide con la acción óptima para el principal. En presencia de riesgo moral, los contratos óptimos son los que consiguen un compromiso óptimo entre:

- el reparto del riesgo, que tiende a que los pagos al agente sean constantes o poco dependientes del resultado,
- la provisión adecuada de incentivos, que tiende a supeditar los pagos a los resultados.

En los siguientes ejemplos veremos como se resuelve este dilema.

Modelo de seguros (contra incendios)

El seguro ilustra a la perfección el conflicto (entre reparto de riesgos y provisión de incentivos) que caracteriza las situaciones de riesgo moral. En efecto, el objetivo de la compañía de seguros (principal) es el reparto del riesgo por mutualización, mientras que, por otro lado, el riesgo individual puede depender del comportamiento del asegurado (agente) respecto a la adopción de medidas de cautela.

Consideremos una situación en la que el propietario de una casa valorada en W puede suscribir una póliza de seguros contra incendios.

Definition *(**Contrato de seguros**) Una póliza de seguros es un par de números (q,R), donde q es la prima del seguro y R el reembolso hecho por la compañía en caso de siniestro.*

La utilidad esperada del agente es

$$u(q,R,e) = U(q,R) - v(e)$$

La probabilidad de que se produzca un incendio,

$$\begin{aligned} p(e) &= ep^L + (1-e)p^H \\ &= p^H + e[p^L - p^H], \end{aligned}$$

depende del nivel de cautela (esfuerzo) del propietario de la casa. Supongamos que el nivel de esfuerzo es continuo en el intervalo $[0,1]$, $e \in [0,1]$. Tenemos $p'(e) = p^L - p^H < 0$, i.e. a mayor esfuerzo por parte del propietario, menor probabilidad de incendiarse la casa. Por otra parte, realizar un esfuerzo e para proteger la casa supone un coste o desutilidad $v(e) = e$ para el propietario. El problema de la aseguradora es determinar los valores de q y R tales que

$$\max_{(q,R)} \; q - p(e)R.$$

La determinación de la póliza de seguros (q,R) es un problema de contrato con información asimétrica entre la compañía de seguros y el propietario de la casa con esfuerzo continuo. Los elementos característicos de este tipo de situación son:

- Las utilidades (vNM) del principal y el agente, Π y u, respectivamente
- El coste para el agente del esfuerzo que realiza, $v(e)$
- El conjunto de posibles esfuerzos, $[0,1]$
- Los valores posibles del excedente, las modalidades de reparto de estos excedentes contempladas en el contrato y las probabilidades asociadas que, según nuestra notación general, son:

Excedentes	Parte Agente	Parte Principal	Probabilidades
x_1	ω_1	$x_1 - \omega_1$	$p_1(e)$
...	...	...	...
x_n	ω_n	$x_n - \omega_n$	$p_n(e)$

En el caso concreto que nos ocupa, esta tabla se particulariza en

Excedentes	Parte Agente	Parte Principal	Probabilidades
la casa se quema: 0	$R - q$	$q - R$	$p(e) = p^H + e[p^L - p^H]$
la casa no se quema: W	$W - q$	q	$1 - p(e)$

donde se verifica que $x_1 < x_2$ y, además,

$$\frac{p_1'(e)}{p_1(e)} = \frac{p'(e)}{p(e)} = \frac{p^L - p^H}{p(e)} < 0$$

y

$$\frac{p_2'(e)}{p_2(e)} = \frac{p'(e)}{1-p(e)} = \frac{p^L - p^H}{1-p(e)} > 0,$$

i.e. $\frac{p_1'(e)}{p_1(e)} < \frac{p_2'(e)}{p_2(e)}$: para cada valor de e el coeficiente de verosimilitud aumenta con el valor del excedente. Por lo tanto, $\omega_1 < \omega_2$, lo cual significa que la parte del excedente que se lleva el agente también aumenta con el excedente total. En el presente caso, esto nos lleva al siguiente resultado.

Conclusion *El reembolso de la compañía de seguros es inferior al valor real del bien asegurado, $R < W$.*

Proof Que $\omega_1 < \omega_2$ significa que $R - q < W - q$, lo cual implica que $R < W$.

Para determinar el contrato óptimo, podemos utilizar las ecuaciones correspondientes al enfoque de primer orden,

$$u'(w_i) = \frac{1}{\lambda + \mu \frac{p_i'(e)}{p_i(e)}}, \; i = 1, 2,$$

que en el presente caso se particularizan en

$$u'(R-q) = \frac{1}{\lambda + \mu \frac{p^L - p^H}{p(e)}}, \; i = 1 \qquad \#$$

y

$$u'(W-q) = \frac{1}{\lambda + \mu \frac{p^H - p^L}{1-p(e)}}, \; i = 2. \qquad \#$$

Es decir, tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, R y q, que podemos obtener en función de e, λ y μ.

Example *Si $u(x) = \sqrt{x}$, entonces $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, y las ecuaciones (ref: f1) y (ref: f2) se reescriben como $\frac{1}{2\sqrt{R-q}} = \frac{1}{\lambda + \mu \frac{p^L - p^H}{p(e)}}$ y $\frac{1}{2\sqrt{W-q}} = \frac{1}{\lambda + \mu \frac{p^H - p^L}{1-p(e)}}$, respectivamente. Resolviendo estas dos ecuaciones, se obtiene*

$$q = W - \frac{1}{4}\left(\lambda + \mu \frac{p^H - p^L}{1-p(e)}\right)^2$$

y

$$R = W - \frac{1}{4}\left(\lambda + \mu \frac{p^H - p^L}{1-p(e)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\lambda + \mu \frac{p^L - p^H}{p(e)}\right)^2$$

como póliza de seguros óptima. □

Example *Si $u(x) = \ln x$, (mayor aversión al riesgo que antes, ya que ahora, $\frac{u''}{u'} = \frac{1}{x}$, mientras que en el ejemplo anterior, $\frac{u''}{u'} = \frac{1}{2x}$), entonces $u'(x) = \frac{1}{x}$, con lo cual las* *ecuaciones (ref: f1) y (ref: f2) se particularizan en* $\frac{1}{R-q} = \frac{1}{\lambda+\mu\frac{p^L-p^H}{p(e)}}$ *y* $\frac{1}{W-q} = \frac{1}{\lambda+\mu\frac{p^H-p^L}{1-p(e)}}$, *respectivamente. Resolviendo una vez más estas dos ecuaciones, se obtiene*

$$q = W - \lambda - \mu\frac{p^H - p^L}{1 - p(e)}$$

y

$$\begin{aligned} R &= \lambda + \mu\frac{p^L - p^H}{p(e)} + q \\ &= W - \mu\left(\frac{p^H - p^L}{1 - p(e)} - \frac{p^L - p^H}{p(e)}\right) \end{aligned}$$

Comparar con el contrato de seguro de arriba. □

Racionamiento en el mercado de crédito (provocado por el problema de riesgo moral)

Consideremos una empresa que acude a un banco a pedir un préstamo I para financiar un determinado proyecto de inversión. Existen dos tipos de proyectos de inversión posibles, $t \in \{a, b\}$, y la empresa es la que decide realizar uno u otro con el préstamo recibido. El beneficio previsto del proyecto a, en caso de resultar exitoso, es Π_a y el beneficio previsto del proyecto b, en caso de ser exitoso, es Π_b. Supongamos que

$$\Pi_a < \Pi_b, \qquad \#$$

i.e. el proyecto b rinde mayor beneficio que el a. Las probabilidades de éxito de los proyectos a y b son p_a y p_b, respectivamente. ($1 - p_a$ y $1 - p_b$ son las probabilidades de fracaso, en cuyo caso el beneficio de cada uno de los proyectos es cero.) Supongamos que

$$p_a\Pi_a > p_b\Pi_b, \qquad \#$$

i.e. el beneficio esperado del proyecto a es mayor que el de b. Las dos desigualdades (ref: c1) y (ref: c2) consideradas conjuntamente implican que $p_a > p_b$, i.e. que el proyecto a es más "seguro" que el proyecto b.

Definition ***(Contrato de deuda típico)*** *Un contrato de deuda standar es un contrato por el que, dado un proyecto de inversión* $t \in \{a, b\}$, *la empresa obtiene, en caso de resultar exitoso,* Π_t *y paga al banco un interés R. Si el proyecto fracasa, la empresa quiebra y el banco no recupera nada.*

El beneficio esperado neto para la empresa que elige el proyecto $t \in \{a, b\}$ es

$$p_t(\Pi_t - R)$$

y para el banco que presta a una empresa que elige el proyecto $t \in \{a, b\}$

$$p_tR.$$

El préstamo del banco a la empresa es un contrato (contrato de préstamo o de deuda), donde el banco actúa como principal y la empresa como agente. El banco diseña el contrato fijando el interés R que la empresa habrá de reembolsar.

Información simétrica

Si el proyecto en el que la empresa invierte el préstamo puede incluirse como cláusula en el contrato de préstamo, estamos ante una situación con información simétrica. En este caso, dado que $p_a > p_b$, entonces $p_a R > p_b R$, i.e. el banco obtiene un rendimiento mayor si la empresa prestataria invierte en el proyecto a que si invierte en el b. De aquí se deriva el siguiente resultado.

Conclusion *El contrato óptimo con información simétrica prescribe invertir en a.*

Es decir, bajo información simétrica el banco sólo presta a la empresa que decida invertir en el proyecto a. El interés óptimo (para el banco) R^* que se estipula en el contrato es el que se obtiene saturando la RP de la empresa. Si el ingreso de reserva de la empresa es $\underline{U} = 0$ (estamos suponiendo, para simplificar, que la alternativa de ingresos de la empresa es cero), la RP es

$$p_a(\Pi_a - R) \geq 0,$$

con lo cual el banco fija $R^* = \Pi_a$ y el beneficio esperado que obtiene la empresa es nulo.

Información asimétrica: riesgo moral

Supongasmo ahora que el tipo de proyecto de inversión no puede ser incluido como cláusula contractual. En este caso estamos ante una situación de información asimétrica de tipo riesgo moral. Los elementos característicos del problema

Excedentes	Parte Agente	Parte Principal	Probabilidades
x_1	ω_1	$x_1 - \omega_1$	$p_1(e)$
...	...	...	...
x_n	ω_n	$x_n - \omega_n$	$p_n(e)$

son, en este caso,

Excedentes	Parte Agente	Parte Principal	Probabilidades
inversión no exitosa: $x_1 = 0$	0	0	$p_1(t)$
inversión a exitosa: $x_2 = \Pi_a$	$\Pi_a - R$	R	$p_3(t)$
inversión b exitosa: $x_3 = \Pi_b$	$\Pi_b - R$	R	$p_3(t)$

Las probabilidades correspondientes a cada nivel de excedente identificado en la tabla anterior dependen del proyecto t en el que invierte la empresa. Dichas probabilidades son:

	$t = a$	$t = b$
p_1	$1 - p_a$	$1 - p_b$
p_2	p_a	0
p_3	0	p_b

Para analizar el comportamiento del banco, es preciso distinguir el caso en el que la empresa decide realizar el proyecto a del caso en el que elige b.

(a) La empresa prefiere el proyecto *a* al proyecto *b*

Dado R, y de acuerdo con la restricción CI, la empresa elige a en lugar de b si

$$p_1(a)\omega_1 + p_2(a)\omega_2 + p_3(a)\omega_3 \geq p_1(b)\omega_1 + p_2(b)\omega_2 + p_3(b)\omega_3$$

i.e., si

$$(1 - p_a)0 + p_a(\Pi_a - R) + 0(\Pi_b - R) \geq (1 - p_b)0 + 0(\Pi_a - R) + p_b(\Pi_b - R). \qquad \#$$

Manipulando (ref: h1), resulta:

$$R \leq \frac{p_a\Pi_a - p_b\Pi_b}{p_a - p_b} \equiv \widehat{R}, \qquad \#$$

i.e. si se cumple la condición CI (ref: d1), $R \leq \widehat{R}$, la empresa elige el proyecto a. El beneficio de la empresa es $p_a(\Pi_a - R)$ y la RP se escribe como

$$p_a(\Pi_a - R) \geq 0, \qquad \#$$

lo cual implica que $\Pi_a \geq R$. Sin embargo, dado que $\Pi_a \geq \widehat{R}$, se concluye que la RP, $\Pi_a \geq R$, es redundante cuando se cumple ya la CI (ref: d1).

(**b**) **La empresa elige el proyecto** b **en lugar del** a

En este caso, la restricción CI indicativa de que la empresa prefiere el proyecto b es

$$R > \widehat{R} \qquad \#$$

El beneficio de la empresa es $p_b(\Pi_b - R)$ y la RP

$$p_b(\Pi_b - R) \geq 0, \qquad \#$$

lo cual implica que $R \leq \Pi_b$. Por lo tanto, teniendo en cuenta los dos casos anteriores, (a) y (b), el proyecto elegido por la empresa es $t = a$ si

$$0 < R \underset{\text{(CI)}}{\leq} \widehat{R} \underset{\text{(RP)}}{\leq} \Pi_a$$

y es $t = b$ si

$$\widehat{R} \underset{\text{(CI)}}{\leq} R \underset{\text{(RP)}}{\leq} \Pi_b.$$

En consecuencia, el beneficio esperado del banco es

$$p_tR = \begin{cases} p_aR, \text{ si } 0 < R \leq \widehat{R} \\ p_bR, \text{ si } \widehat{R} < R \leq \Pi_b \end{cases} \qquad \#$$

y el nivel óptimo de intereses que elige el banco, R^{**}, es el que maximiza su beneficio dado en (ref: s1). Es claro que los candidatos a equilibrio son los dos extremos de los intervalos definidos en (ref: s1), $\widehat{R}$ y Π_b, con los que el banco obtiene los beneficios $p_a\widehat{R}$ y $p_b\Pi_b$, respectivamente. Comparando estos beneficios, resulta

(**1**) $p_a\widehat{R} < p_b\Pi_b$.

En este caso, el valor óptimo elegido por el banco para los intereses es $R^{**} = \Pi_b$. La empresa invierte en el proyecto b y obtiene un beneficio esperado nulo, $p_b(\Pi_b - R^{**}) = 0$. Este valor óptimo de los intereses bancarios cumple holgadamente la restricción CI (por la que la empresa invierte en el proyecto b) y satura la RP (por la que la empresa obtiene un beneficio esperado nulo). En el caso que estamos analizando, el banco elige el mismo nivel de intereses cuando obliga a la empresa a invertir en b que bajo información simétrica, Π_b, de ahí que se sature la RP.

(**2**) $p_a\widehat{R} > p_b\Pi_b$.

En este caso, $R^{**} = \widehat{R}$. La empresa ahora invierte en el proyecto a y obtiene un beneficio esperado estrictamente positivo, $p_a\left(\Pi_a - \widehat{R}\right) > 0$. Este valor óptimo de los intereses bancarios para el préstamo satura la restricción CI (por la que la empresa invierte en a) y cumple holgadamente la RP (por la que la empresa obtiene un beneficio esperado estrictamente positivo). Este beneficio positivo refleja las rentas informacionales del agente en presencia de riesgo moral. En efecto, para inducir a la empresa a elegir el proyecto más seguro, a, el banco debe establecer un tipo de interés inferior al que propondría bajo información simétrica, $\widehat{R} < \Pi_a$. (Si el interés aplicado por el banco fuese $\widehat{R} = \Pi_a$, la empresa invertiría en el proyecto b y no en el a.)

En el caso (2), y sólo en este caso, la empresa obtiene un beneficio estrictamente positivo. Si hay N empresas en la economía y cada una de ellas solicita un crédito de cuantía I para obtener este beneficio estrictamente positivo, la demanda de préstamos que recibe el banco es NI. Si, por otra parte, el banco sólo dispone de una cantidad $L < NI$, se produce un exceso de demanda crediticia, que el banco no puede gestionar aumentando el interés que aplica (por el problema de riesgo moral mencionado). En su lugar, lo que hace el banco es racionar el crédito haciendo que algunas empresas se queden sin préstamo, i.e. se produce racionamiento en el mercado de crédito.

Empleador y empleado

Un ejemplo de aplicación del enfoque de primer orden es el caso en el que un empleador (principal) contrata a un empleado (agente) para realizar una determinada tarea. Supongamos que si el agente realiza un nivel de esfuerzo e, el principal observa un resultado o excedente $x = e + \varepsilon$, suma del esfuerzo realizado y de un componente aleatorio ε. Supongamos que ε sigue una distribución normal de media 0 y varianza σ^2, $\varepsilon \overset{sd}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Tenemos, $E(x) = e$ y, por otra parte, $Var(x) = \sigma^2$, lo que significa que la variabilidad del resultado x (o, lo que es lo mismo, la pérdida de control del mismo por parte del agente a través del esfuerzo que realiza) aumenta con σ^2.

El principal propone un contrato lineal en el resultado

$$w = a + bx,$$

que consiste en un pago fijo a más un bonus variable bx igual a una fracción b del resultado total x. El principal es neutral al riesgo y su utilidad esperada (beneficio esperado) es

$$\begin{aligned} E(x - w) &= E(x) - E(w) \\ &= E(x) - E(a + bx) \\ &= -a + (1 - b)e. \end{aligned}$$

El coste del esfuerzo para el agente es $v(e) = \frac{1}{2}e^2$. Dicho agente es averso al riesgo y su utilidad esperada es del tipo media-varianza, i.e.

$$\begin{aligned} Eu(w, e) &= E(w) - \frac{1}{2}\rho Var(w) - v(e) \\ &= a + be - \frac{1}{2}\rho b^2\sigma^2 - \frac{1}{2}e^2, \end{aligned}$$

donde ρ es el coeficiente Arrow-Pratt de aversión al riesgo, $\rho = -\frac{u''}{u'}$.

Aplicando el enfoque de primer orden, el programa del principal es

$$\max_{(a,b,e)} -a+(1-b)e, \text{ s.a:}\begin{cases} a+be-\frac{1}{2}\rho b^2\sigma^2-\frac{1}{2}e^2 \geq \underline{U} \\ \frac{\partial\left(a+be-\frac{1}{2}\rho b^2\sigma^2-\frac{1}{2}e^2\right)}{\partial e} = 0. \end{cases} \quad \#$$

Resolviendo primero la CPO que refleja la restricción CI y que consiste en determinar el valor de e que maximiza la utilidad esperada del agente (recordemos que en un contexto con riesgo moral la elección del esfuerzo queda en manos del agente),

$$\frac{\partial(a+be-\frac{1}{2}\rho b^2\sigma^2-\frac{1}{2}e^2)}{\partial e} = 0 \Leftrightarrow e = b$$

y sustituyendo e por b tanto en el programa del principal como en la RP, (ref: w1) se reescribe como

$$\max_{(a,b)} -a+(1-b)b, \text{ s.a: } a+b^2-\frac{1}{2}\rho b^2\sigma^2-\frac{1}{2}b^2 \geq \underline{U}. \quad \#$$

El Lagrangiano de (ref: w2) es

$$£ = -a+(1-b)b+\lambda\left(a+b^2-\frac{1}{2}\rho b^2\sigma^2-\frac{1}{2}b^2-\underline{U}\right)$$

y las CPO son

$$0 = \frac{\partial £}{\partial a} = -1+\lambda \quad \#$$

y

$$0 = \frac{\partial £}{\partial b} = 1-2b+2\lambda b-\lambda\rho b\sigma^2-\lambda b \quad \#$$

Resolviendo (ref: q1)-(ref: q2), se obtiene $\lambda = 1$ y $b = \frac{1}{1+\rho\sigma^2}$. Finalmente, de la RP se obtiene $a = \underline{U}+\frac{1}{2}\rho b^2\sigma^2-\frac{1}{2}b^2 = \underline{U}+\frac{1}{2}(\rho\sigma^2-1)\left(\frac{1}{1+\rho\sigma^2}\right)^2$. En definitiva, el contrato óptimo es

$$w = \left[\underline{U}+\frac{1}{2}(\rho\sigma^2-1)\left(\frac{1}{1+\rho\sigma^2}\right)^2\right]+\left(\frac{1}{1+\rho\sigma^2}\right)x.$$

En el contrato (compuesto por un fijo y un variable) óptimo, podemos observar como la fracción $\frac{1}{1+\rho\sigma^2}$ del resultado total x que configura la parte variable disminuye tanto con ρ, el nivel de aversión al riesgo del agente, como con σ^2, inversamente vinculado al control directo sobre el resultado final que tiene el agente (a través del esfuerzo que desempeña). El contrato óptimo combina, pues, el objetivo de reparto óptimo del riesgo entre principal y agente con el de provisión adecuada de incentivos al agente.