

MATERIA

Microeconomía: mercados, prezos e goberno

TITULACIÓN

Máster en economía: organización industrial e mercados financeiros

unidade
didáctica
6

O valor da información

Manel Antelo

Área de Fundamentos da Análise Económica
Departamento de Fundamentos da Análise Económica
Facultade de Ciencias Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2016

Deseño e maquetación

J. M. Gairí

Edita

Servizo de Publicacións e Intercambio Científico
da Universidade de Santiago de Compostela

usc.es/publicacions

ISBN

—

DOI

<http://dx.doi.org/10.15304/> _____

MATERIA: Microeconomía: mercados, prezos e goberno

TITULACIÓN: Máster en economía: organización industrial e mercados financeiros

PROGRAMA XERAL DO CURSO

Localización da presente unidade didáctica

Unidade 1. Introducción

Unidade 2. Economía das poxas

Unidade 3. Risco moral e incentivos

Unidade 4. O problema da selección adversa

Unidade 5. A economía da tecnoloxía da información

Unidade 6. O valor da información

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

OS OBXECTIVOS

1. Obxectivos xerais da materia
2. Obxectivos específicos da unidade didáctica

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

OS CONTIDOS

1. Introducción
2. Un servizo de información completa
3. A regra de Bayes e a revisión ou actualización das crenzas a priori
4. A flexibilidade das opcións elixidas nun contexto dinámico
5. O valor da información sobre o prezo de mercado ao que se poderá vender a produción
6. A incerteza e o papel dos mercados de futuros

ACTIVIDADES PROPOSTAS

AVALIACIÓN DA UNIDADE

BIBLIOGRAFÍA

PRESENTACIÓN

A materia *Microeconomía: mercados, prezos e goberno* enmárcase no bloque formativo dos fundamentos da economía que se imparte no Máster en *economía: organización industrial e mercados financeiros* da Facultade de Ciencias Económicas e Empresariais da USC. Ten o carácter de materia obrigatoria Máster RD 1393/2007 no Plan de Estudos e, temporalmente, impártese no primeiro semestre do ano académico.

A carga lectiva da materia é de 6 créditos ECTS, dos cales o 60% están configurados por exposicións a cargo do profesor e o 40% restante ten carácter interactivo. En termos prácticos, isto tradúcese en que, semanalmente, as aulas expositivas teñen unha duración de dúas horas e combínanse coas aulas interactivas e seminarios de hora e media cada unha delas.

A programación docente da materia está dividida en seis unidades didácticas, que abordan os aspectos máis salientables para acadar unha visión completa e comprensiva do comportamento dos axentes económicos en contextos caracterizados pola presenza de información asimétrica. É dicir, analízanse polo miúdo os problemas de asignación de recursos cando a información que posúe unha das partes que intervén na correspondente transacción económica non é a mesma ca a que posúe a outra.

O aspecto fundamental da materia *Microeconomía: mercados, prezos e goberno* é facilitar aos estudantes un coñecemento do método e da análise propios da microeconomía e das súas principais aplicacións a contextos nos que a información está desigualmente distribuída. A idea principal que subxace na economía da información é que a información dos axentes económicos involucrados en calquera proceso de asignación é un recurso valioso e especial.

É valioso porque os consumidores que saben onde mercar produtos de boa calidade e a bo prezo tíranlle máis partido aos recursos que posúen ca os que non coñecen isto, os labregos que teñen mellores predicións meteorolóxicas incorren en menos riscos na xestión das súas colleitas ca os que teñen peor información, as empresas que contan con boa información sobre a demanda dos produtos que venden teñen maiores beneficios ca as que dispoñen de peor información...

Por outra banda, a información é un ben especial polo menos por tres razóns. En primeiro lugar, porque non é doada de definir: a cantidade de información que se pode obter no mercado con determinadas accións non está ben acoutada (ao contrario do que acontece coa maioría dos bens ordinarios como as mazás, as toallas ou as entradas de cine). En segundo lugar, porque a meirande parte da información é duradeira e ten trazos de ben público. En terceiro lugar, porque a información obtida polos diversos axentes que interveñen nas transaccións de mercado non é homoxénea; máis ben ao contrario, o que ocorre é que algúns axentes teñen información privada, relevante para a toma de decisións, e que os demais axentes non poden observar ou ben poden facelo pero a un custo prohibitivo.

En definitiva, nesta materia analízanse situacións nas que a información asimétrica é un trazo esencial. En cada unha delas, facemos fincapé nos efectos que, desde unha perspectiva positiva, produce esa característica no comportamento dos axentes que toman parte nas correspondentes transaccións (en termos de perdas de eficiencia

paretiana, transferencia de rendas duns axente aos outros, etc.), e na avaliación que, desde o punto de vista normativo, se pode facer dos resultados acadados.

Polo que respecta ao desenvolvemento da materia, esta xira arredor da combinación de dous tipos de aulas: as aulas expositivas e as aulas interactivas. Na parte expositiva faise a aproximación teórica e «en abstracto» á materia e o profesor é o responsable principal dela transmitindo os contidos teóricos d materia. Pola contra, nas clases interactivas adóptase un enfoque práctico co estudo de casos —tanto ficticios coma reais— e coa finalidade de que o alumnado poña a proba os coñecementos adquiridos e, polo tanto, vaia rexistrando a súa aprehensión da materia a través da autoavaliación. En consecuencia, os alumnos son os actores principais nestas sesións.

Cada unha das unidades didácticas (UD de aquí en adiante) que compoñen a materia afonda en cada un dos aspectos esenciais do proceso de toma de decisións con información asimétrica. Sen ir máis lonxe, a análise do *valor da información* é de vital importancia para examinar polo miúdo a toma de decisións en contextos de información incompleta. En particular, catro son aspectos analizados nesta UD. En primeiro lugar, coñecer en que medida a toma de decisións en contextos de incerteza está influenciada pola dispoñibilidade de información que teñen os axentes involucrados. En segundo lugar, como fan estes axentes para revisar ou actualizar o seu sistema de crenzas iniciais cando reciben información adicional á que tiñan inicialmente sobre a ocorrencia dun determinado evento. En terceiro lugar, cal é valor, en termos económicos, de dita información, tanto si é completa como si é incompleta. Finalmente, analízase o valor da flexibilidade das accións, i.e., accións que non son irreversibles, en contextos dinámicos nos que os cursos de accións están configurados pola adopción dunha acción no presente e doutra (que pode ser ou non a mesma) no futuro.

Esta UD é a sexta da materia, despois de cinco anteriores nas que, sucesivamente, se presentan o obxecto da economía da información, a teoría económica das poxas, o problema do risco moral e os incentivos, o problema da selección adversa e a análise económica da tecnoloxía da información. A comprensión desta UD reviste un grao medio de dificultade, debido á ampla casuística dos escenarios nos que poden verse involucrados os axentes á hora de recibir información e valorar dita información.

O resto da UD está organizada da seguinte forma. En primeiro lugar, fálase dos obxectivos da materia en xeral e da presente UD en particular, e despois dos principios metodolóxicos que se empregan no desenvolvemento da unidade. A continuación, expóñense os contidos da UD e preséntanse as actividades propostas. Por último, facemos referencia á avaliación da unidade.

OS OBXECTIVOS

1. Obxectivos xerais da materia

Microeconomía: mercados, prezos e goberno é unha materia obrigatoria, que afonda polo miúdo no campo específico da economía da información. Coas miras postas

en dar a coñecer ao alumnado o funcionamento do mecanismo de mercado en condicións de información incompleta e asimétrica, os obxectivos da materia son:

- Proporcionar as habilidades e as técnicas necesarias para que o alumnado coñeza a fondo e de xeito comprensivo os aspectos económicos básicos dos mecanismos de asignación de recursos en condicións de información asimétrica.
- Proporcionar a capacidade de abstracción e razoamento lóxico imprescindibles para o desenvolvemento científico e o exercicio da práctica profesional do alumnado (capacidade de expresión utilizando linguaxes formais, gráficas e simbólicas; capacidade para aplicar métodos analíticos; capacidade para relacionar e manipular conceptos seguindo un propósito).
- Fixar e consolidar os coñecementos e as habilidades adquiridas co estudo dos aspectos metodolóxicos desenvolvidos noutras materias do máster.
- Mostrar ao alumnado como os coñecementos que adquiren coa materia e a capacidade de resolución de problemas de moi diversa índole poden aplicalos a contornas novas ou pouco coñecidas dentro de contextos máis amplos (ou multidisciplinares).
- Capacitar ao alumnado para integrar coñecementos e afrontar a complexidade de formular xuízos a partir dunha información que, sendo incompleta ou limitada, inclúa reflexións sobre as responsabilidades sociais e éticas vinculadas á aplicación dos seus coñecementos e xuízos.
- Constituír unha base sólida para todas as relacións futuras que os/as estudantes vaian ter ao longo da vida, tanto no eido profesional (asumir responsabilidades directivas, na función pública, etc.) como persoal (argumentar e comunicarse eficazmente).

2. Obxectivos específicos da unidade didáctica

En canto aos obxectivos específicos que debe acadar o alumnado na presente UD, o seu desenvolvemento quere contribuír a que con ela o alumnado poida ser quen de:

- Coñecer con exactitude como se actualizan as probabilidades iniciais sobre a ocorrencia dun determinado estado da natureza cando se recibe información adicional.
- Coñecer o valor económico que ten a información que podemos recibir antes de tomar unha determinada decisión.
- Coñecer o papel da flexibilidade e irreversibilidade das accións.
- Coñecer o proceso decisorio dunha empresa competitiva cando se enfronta á incerteza de mercado, consistente en que cando ten que decidir a cantidade que vai producir descoñece o prezo de mercado o cal a vai vender.
- Comprender a importancia que teñen os mercados de futuros como institucións que facilitan información.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

O método didáctico comprende o conxunto de estratexias e técnicas utilizadas polo docente para axudar a conseguir os obxectivos dos discentes, mediante o traballo dos contidos nun contexto organizado. En particular, a metodoloxía que se emprega nesta UD (e, de forma semellante, no resto de unidades que compoñen a materia) está baseada en:

a) Exposicións maxistras, nas que o profesor expón os conceptos e os contidos teóricos que fundamentan a análise do valor da información e intercala na propia exposición pequenos exemplos para mostrar a utilidade práctica e promover o interese do alumnado. Estes contidos están á disposición do alumnado con antelación ao seu desenvolvemento na aula. O desenvolvemento dos contidos faise empregando, principalmente, un ordenador persoal e un canón proxector como soportes da UD, para a presentación en diapositivas do material que serve de fío condutor ás explicacións efectuadas. Ao mesmo tempo, na presentación detallaranse unha serie de referencias bibliográficas que complementan a presentación e que o alumnado debe consultar. Nas sesións maxistras combinaranse os métodos expositivo, interrogativo e por descubrimento. Así, o alumnado non se limita a recibir información do profesor de xeito unidireccional e pasivo, senón que ten a oportunidade de implicarse na resposta das cuestións formuladas nas diferentes sesións.

b) Clases interactivas, nas que se busca reforzar a comprensión dos conceptos e das ideas tratados nas sesións expositivas. Para iso, analízanse situacións reais ou ficticias que reflicten a ampla variedade de contextos que xorden cando os axentes económicos reciben información adicional coa que revisan as súas crenzas iniciais. Nas sesións interactivas combinarase o método interrogativo e por descubrimento, de forma que o profesor desempeña un papel de moderador e é o alumnado o que toma o temón de cada sesión.

En resumo, partindo do método afirmativo, no que o profesor expresa os conceptos máis relevantes e as relacións máis determinantes ao alumnado, este ten que saber achegarse —tanto individualmente coma en grupo (variando en función do caso en cuestión)— ao método de elaboración, de tal forma que esta metodoloxía permite traballar a discusión. O alumnado participa activamente nas aulas expositivas e toma o encargo didáctico nas interactivas, nas que conecta o marco teórico exposto coa realidade dos consumidores e, ao mesmo tempo, reforza e aclara dúbidas sobre a teoría exposta. E o profesor busca activar a curiosidade e o interese do alumnado polo contido da RP dos consumidores, facendo fincapé na súa importancia e amosando a súa relación co mundo real e a grande utilidade que pode ter para a súa carreira estudantil e profesional. Ademais, faranse diferentes preguntas aos alumnos, tanto nas clases expositivas coma nas interactivas, para dar pé a interpretar en grupo as respostas ofrecidas e elaborar así unhas conclusións finais.

Nas análises que se desenvolvan nos dous tipos de aulas utilizarase a linguaxe matemático-formal xunto coa linguaxe gráfica para facilitar a intuición e a comprensión ao alumnado.

OS CONTIDOS

1. Introducción

Nesta UD trátanse os aspectos máis importantes arredor do valor económico da información. En primeiro lugar, examínase como decidimos se adquirir ou non información adicional á que temos inicialmente para tomar unha determinada decisión. En segundo lugar, e no caso de que o mellor sexa adquirila, estudamos como se determina a cantidade óptima que se debe adquirir. En terceiro lugar, determinamos o valor da información, tanto se esta é completa e permite eliminar totalmente a incerteza como se é incompleta e só permite reducir a incerteza. En cuarto lugar, analizamos como revisan os axentes o seu sistema de crenzas iniciais cando reciben información adicional sobre o estado que ocorrerá. Finalmente, analízase a relación existente entre flexibilidade e información, así como o valor que ten para unha empresa competitiva a información que, sobre o prezo, pode obter dun servizo de información ou asesoría.

A información pode aludir a un conxunto de datos ou coñecementos acumulados sobre algo (stock) ou facer referencia a unha mensaxe ou unha noticia (un fluxo ou incremento nese stock). Por exemplo, cando dicimos que un individuo “ten coñecemento sobre o quecemento global”, referímonos á información como variable stock. Pero se este individuo “le unha noticia que descoñecía sobre o quecemento global”, estamos fronte a un incremento do stock de información sobre o quecemento global.

É importante destacar que información e crenzas non son o mesmo. Cando falamos de información referímonos á evidencia obxectiva sobre algo. A versión subxectiva da información é o que chamamos crenzas. Nesta distinción, o aspecto fundamental é analizar o proceso polo que un aumento do coñecemento obxectivo (noticias ou mensaxes) leva aos axentes racionais a actualizar o seu sistema de crenzas a priori (as de antes da información), transformándoas en crenzas revisadas ou actualizadas. Esta é, xustamente, a esencia da información: a de modificar as crenzas dos axentes. En calquera caso, as decisións finais sempre se basean en crenzas (a posteriori) subxectivas.

Outra distinción na que é necesario facer énfase é entre servizo de información e mensaxe ou noticia. A diferenza reside en que podemos adquirir un servizo de información, pero non podemos adquirir unha mensaxe. A título ilustrativo, podemos comprar os servizos dun servizo meteorolóxico (unha predición, por exemplo), pero non podemos comprar unha mensaxe particular como por exemplo “mañá a temperatura será de 25 graos”. Outro exemplo é o sistema de pombas mensaxeiras que cubriu en poucas horas os 362 km que separan a localidade de Waterloo (Bélxica) de Londres e que levou á familia Rothschild a primicia da derrota de Napoleón fronte ao duque de Wellington e o mariscal de campo prusiano von Blücher na decisiva batalla de Waterloo do 18 de xuño de 1815. Este servizo foi un servizo de información, pero o anuncio da derrota de Napoleón foi a mensaxe ou noticia.¹

¹ Os Rothschild foron os primeiros londinienses que coñeceron a decisiva noticia que marcaría o inicio da nova Europa e sacaron rapidamente tallada diso. Venderon a prezos dispares

Tamén é importante destacar a diferenza entre información de dominio público e información privada, porque o grao de escaseza ou abundancia da información é un dos factores que determinan o seu valor económico. A información ten máis valor canto máis privada sexa. Unha situación extrema é aquela na que a información sobre certo dato é coñecida por un único axente e ninguén máis (información privada). O extremo oposto é o contexto no que a información é coñecida por todos os axentes ou pode chegar a ser coñecida por todos sen custo ningún (información pública).

Con todo, a distinción entre información privada e pública non garda relación coa transcendencia da información. Chamamos publicación á conversión de información privada en información pública. Toda diseminación de información —incluso a comunicación confidencial a unha única persoa— supón unha perda de privacidade e, xa que logo, unha mingua no valor da información.

O resto da UD está estruturado en cinco seccións. Na sección 2 analizamos os aspectos económicos dun servizo de información completa, é dicir, un que transforma unha situación de incerteza noutra de certeza. Na sección 3 examinamos como se utiliza a regra de Bayes para revisar ou actualizar unhas determinadas crenzas a priori cando se recibe nova información. A sección 4 dedícase a analizar a flexibilidade das decisións nun contexto dinámico. A sección 5 examina o valor da información sobre o prezo para unha empresa competitiva que actúa nun contexto de incerteza de mercado. A sección 6 analiza o papel dos mercados de futuros. A UD conclúe cunha serie de actividades cuxa realización se deixa nas mans do lector.

2. Un servizo de información completa

Un servizo de información completa é o que predí perfectamente o que vai ocorrer e, xa que logo, resolve completamente a incerteza. Para ser máis precisos, se a incerteza inicial se describe mediante un conxunto de n posibles estados da natureza, $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, é dicir, unha partición do espazo dunha mostra,² e unhas probabilidades $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ asignadas inicialmente á ocorrencia de cada un deles (crenzas a priori), un servizo de información completa é aquel que nos di cal dos n estados ocorrerá con certeza.³

Antes de contratar o servizo de información o individuo non sabe que estado vai ocorrer. Polo tanto, tampouco sabe que mensaxe recibirá do servizo de

os bonos que posuían do Estado Británico facéndolle crer ao resto do mercado que Inglaterra perdera a transcendental batalla, e provocando así a caída da bolsa de Londres. Despois, e antes de que se descubriera a verdade, recompraron cantidades inxentes deses mesmos bonos a prezos moi inferiores aos que os venderan. Cando por fin a noticia da vitoria de Wellington sobre Napoleón chegou, os prezos dos bonos subiron vertixinosamente e permitíronlle á familia Rothschild obter pingües ganancias.

² Por exemplo, cada estado da natureza pode ser unha descrición do tempo meteorolóxico que irá mañá: estará despexado e caloroso, estará nubrado, choverá pouco, choverá moito, nevará, irá frío...

³ Desta forma, o servizo de información emitirá unha mensaxe como, por exemplo, “o estado será E_2 ”.

información. Agora ben, se cre que a probabilidade de ocorrencia do estado E_i é μ_i , é lóxico que tamén crea que a probabilidade de que o servizo de información lle transmita a mensaxe de que o estado será E_i é μ_i .

Para calcular o valor dun servizo de información completa consideremos o seguinte exemplo que describe o comportamento dun viticultor con relación ao tempo no que realizará a vendima.

EXEMPLO 1 (*Valor da información completa*) Consideremos un viticultor que debe decidir se realizar a vendima nunha semana ou ben facelo ao longo de dúas. Se fai a vendima nunha semana, incorre nun custo de 100, mentres que se a fai ao longo de dúas, o custo é 40 por semana, pero na segunda semana pode chover e a chuvia estragará a uva que estea sen recoller. A crenza a priori do viticultor é que a probabilidade de que chova na segunda semana é μ , $\mu \in (0,1)$. Finalmente, o valor total da vendima ascende a 500. Como determinar se é mellor vendimar nunha semana ou facelo ao longo de dúas?

DISCUSIÓN É evidente que se a vendima se realiza nunha semana, o beneficio do viticultor ascende a $\pi_1 = 500 - 100 = 400$, mentres que se se realiza en dúas, o beneficio é $\pi_2 = 250 - 25 + (1 - \mu)(250 - 25) = 450 - 225\mu$. Comparando ambos os beneficios, o viticultor vendimarán nunha semana se $400 > 450 - 225\mu$, é dicir, se $\mu > \frac{2}{9}$, e farao en dúas semanas, se $\mu < \frac{2}{9}$. En definitiva, o seu beneficio (esperado) dependerá de μ , de forma que

$$\pi(\mu) = \begin{cases} 450 - 225\mu, & \text{se } \mu < \frac{2}{9} \\ 400, & \text{se } \mu > \frac{2}{9} \end{cases} \quad (1)$$

Imaxinemos que existe un servizo que ofrece información sobre o tempo que irá a segunda semana. Canto estará disposto a pagar o viticultor por ese servizo para cada valor da súa crenza a priori μ ? Empecemos supoñendo que o servizo prové información completa, é dicir, informa de que na segunda semana ou ben choverá ou ben non choverá e, xa que logo, resolve a incerteza totalmente. Se o parte emitido é que choverá, o viticultor vendimarán nunha soa semana e o seu beneficio será de $500 - 100 = 400$. Se a mensaxe é que non choverá, entón vendimarán en dúas semanas e o beneficio será de $2(250 - 25) = 450$. Considerando ambos os pagos, o beneficio ex-ante que obtén o viticultor⁴ coa información completa

$$E[\pi] = 400\mu + 450(1 - \mu) = 450 - 50\mu \quad (2)$$

o cal depende de μ . Polo tanto, o valor da información completa para o viticultor é a diferenza entre o beneficio esperado dado en (2) e o beneficio esperado estipulado en (1) e é inmediato que ese valor varía coa súa crenza a priori μ . Cando $\mu < \frac{2}{9}$ o valor é

⁴ É dicir, antes de que se produza a realización da incerteza.

distinto que cando $\mu > \frac{2}{9}$, porque no primeiro caso, sen información, a vendima faríase ao longo de dúas semanas, mentres que no segundo, sen información, faríase nunha e, en consecuencia, o beneficio sería distinto ca no caso anterior. Formalmente, o valor ex-ante da información completa, V , é

$$V(\mu) = \begin{cases} 450 - 50\mu - (450 - 225\mu) = 175\mu, & \text{cando } \mu < \frac{2}{9} \\ 450 - 50\mu - 400 = 50 - 50\mu, & \text{cando } \mu > \frac{2}{9} \end{cases} \quad (3)$$

En (3) é inmediato comprobar que $V=0$ tanto se $\mu=0$ como se $\mu=1$. En ambos os casos o viticultor está seguro (ten información completa) do que vai suceder e non está disposto a pagar nada polo servizo de información que non servirá para mellorar a precisión do sinal que xa ten. En cambio, cando $\mu \in (0,1)$, o viticultor non sabe o que vai ocorrer (ten información incompleta) e o valor da información que restaure a información completa xa non é 0. O valor $V(\mu)$ medra con μ cando $\mu < \frac{2}{9}$ e diminúe con μ cando $\mu > \frac{2}{9}$. Formalmente,

$$\frac{\partial V(\mu)}{\partial \mu} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } \mu \leq \frac{2}{9} \\ \leq 0 & \text{se } \mu \geq \frac{2}{9} \end{cases} \quad (4)$$

e o máximo valor, $V = \frac{350}{9}$, alcánzao cando $\mu = \frac{2}{9}$, é dicir, cando a incerteza é máxima e o viticultor, nun contexto no que non posúe información, está indiferente entre vendimar nunha semana ou en dúas. É neste caso cando a información lle resulta máis útil para decantarse por unha das opcións. ■

3. A regra de Bayes e a revisión ou actualización das crenzas a priori

A información que o axente recibe dun servizo de información sèrvelle para revisar ou actualizar as súas crenzas iniciais sobre as probabilidades de ocorrencia dos diferentes estados da natureza. Polo tanto, recibir información pode facer que cambie de opinión respecto á alternativa óptima que debe adoptar.

Cando a información que se recibe é completa, a actualización das crenzas a priori é inmediata. Imaxinemos que, inicialmente, hai n estados do mundo posibles $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ con probabilidades de ocorrencia $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ e que o servizo de información adicional (completa) emite a mensaxe m indicando que “o estado será E_1 ”. Entón a probabilidade revisada ou actualizada de E_1 será $\hat{\mu}_1 = 1$ e as dos demais estados serán $\hat{\mu}_2 = \dots = \hat{\mu}_n = 0$, co cal pasamos ás crenzas a posteriori $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n) = (1, 0, \dots, 0)$. En definitiva, a actualización das crenzas a priori é tal que pasamos a estar nunha situación de información completa.

As cousas son diferentes cando a información que se recibe é incompleta e só serve para reducir a incerteza, non para eliminala de todo. Neste caso, a revisión das crenzas a priori é algo máis complicada. Imaxinemos que, inicialmente, hai tres posibles estados da natureza $\{E_1, E_2, E_3\}$ que o axente considera equiprobables, co cal o sistema de crenzas a priori é $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. A continuación, o axente

recibe información (incompleta) sobre se ocorrerá ou non o estado E_3 . En particular, recibe unha das dúas seguintes mensaxes:

- A mensaxe m que indica que “ocorrerá E_3 ”. Neste caso as probabilidades revisadas son $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3) = (0, 0, 1)$.
- A mensaxe m' que indica que “non ocorrerá E_3 ”. Neste caso o axente sabe que só poden ocorrer os estados E_1 e E_2 , e, en consecuencia, as probabilidades actualizadas serán $(\mu, 1 - \mu, 0)$. E dado que inicialmente cría que E_1 e E_2 eran equiprobables, é lóxico que tamén crea que as crenzas revisadas sexan $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

A regra que utilizamos para actualizar as crenzas iniciais é a chamada regra de Bayes. Para establecela de maneira formal, necesitamos botar man da probabilidade condicionada e da probabilidade total.

Definición 1. Sexan A e B dous sucesos aleatorios. A probabilidade de que ocorra A ocorrendo B (ou probabilidade de A condicionada a que ocorreu B) é $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$.

A partir da definición 1 podemos reescribir a expresión da probabilidade condicionada como

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) \cdot \Pr(B) \quad (5)$$

que é a chamada regra do produto. Agora supoñamos que pode haber tres estados posibles $\{E_1, E_2, E_3\}$.⁵ Se A é un suceso calquera, podemos escribir

$$A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup (A \cap E_3) \quad (6)$$

porque $A \cap E_1$, $A \cap E_2$ e $A \cap E_3$ son mutuamente disxuntos, co cal a probabilidade do suceso A será a suma das probabilidades de $A \cap E_1$, $A \cap E_2$ e $A \cap E_3$.

Na teoría da probabilidade, o espazo dunha mostra (ou espazo de mostraxe) pódese definir do seguinte xeito.

Definición 2. O espazo dunha mostra S é o conxunto de todos os posibles resultados dun experimento aleatorio.

Por exemplo, se o experimento consiste en lanzar dúas moedas ao aire, o espazo dunha mostra é o conxunto $S = \{CC, CX, XC, XX\}$, onde C denota cara e X denota cruz. A partir de aquí, temos a seguinte definición.

Definición 3. Un conxunto de eventos $s \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ forman unha partición do espazo dunha mostra se satisfán as seguintes condicións:

(a) os eventos son mutuamente excluíntes, é dicir, $E_i \cap E_j = \emptyset, i, j = 1, \dots, n; i \neq j$

⁵ Desenvolvemos a análise con tres estados por simplificación e a título ilustrativo, pero a análise é válida con calquera número n de estados. O importante é que E_1 , E_2 e E_3 formen unha partición do espazo da mostra.

(b) a súa unión é S , é dicir, $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S$ e

(c) $\Pr[E_i] > 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

A partir da expresión (6) a probabilidade do suceso A obtense como

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A \cap E_1) + \Pr(A \cap E_2) + \Pr(A \cap E_3) \\ &= \Pr(A|E_1) \Pr(E_1) + \Pr(A|E_2) \Pr(E_2) + \Pr(A|E_3) \Pr(E_3) \end{aligned} \quad (7)$$

que é a expresión do teorema da probabilidade total. Finalmente, a partir de (7) e da definición de probabilidade condicionada podemos formular a regra de Bayes.

Para iso, imaxinemos que hai tres estados posibles $\{E_1, E_2, E_3\}$, e que as súas probabilidades iniciais de ocorrencia son $\mu_1 = \Pr(E_1)$, $\mu_2 = \Pr(E_2)$ e $\mu_3 = \Pr(E_3)$, respectivamente. Agora supoñamos que ocorreu o suceso A e queremos determinar como se revisan —a partir da información de que ocorreu A — as crenzas iniciais sobre os diferentes estados, dado que ocorreu A . De acordo coa definición de probabilidade condicionada, podemos escribir

$$\Pr(E_i|A) = \frac{\Pr(E_i \cap A)}{\Pr(A)} \quad (8)$$

que equivale a

$$\Pr(E_i|A) = \frac{\Pr(A|E_i) \Pr(E_i)}{\Pr(A|E_1) \Pr(E_1) + \Pr(A|E_2) \Pr(E_2) + \Pr(A|E_3) \Pr(E_3)} \quad (9)$$

e que é a expresión da regra de Bayes e reflicte como se actualizan as crenzas a priori cando recibimos a información adicional de que o suceso A ocorreu.

Supoñamos que recibimos información adicional a través da mensaxe m , que indica que “ocorrerá E_1 ”. Polo tanto, $\Pr(m|E_1) = 1$, $\Pr(m|E_2) = 0$ e $\Pr(m|E_3) = 0$. Utilizando o teorema da probabilidade total que establecemos en (7), resulta

$$\begin{aligned} \Pr(m) &= \Pr(m|E_1) \Pr(E_1) + \Pr(m|E_2) \Pr(E_2) + \Pr(m|E_3) \Pr(E_3) = \\ &= 1 \frac{1}{3} + 0 \frac{1}{3} + 0 \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (10)$$

e as probabilidades iniciais revisadas son, de acordo coa regra de Bayes,

$$\hat{\mu}_1 = \Pr(E_1|m) = \frac{\Pr(m|E_1) \Pr(E_1)}{\Pr(m)} = \frac{(1) \left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 1 \quad (11)$$

$$\hat{\mu}_2 = \Pr(E_2|m) = \frac{\Pr(m|E_2) \Pr(E_2)}{\Pr(m)} = \frac{(0) \left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 0 \quad (12)$$

e

$$\hat{\mu}_3 = \Pr(E_3|m) = \frac{\Pr(m|E_3) \Pr(E_3)}{\Pr(m)} = \frac{(0) \left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 0 \quad (13)$$

Supoñamos, polo contrario, que recibimos a mensaxe m' , que indica que “non ocorrerá E_1 ”. Neste caso, $\Pr(m'|E_1) = 0$, $\Pr(m'|E_2) = 1$ e $\Pr(m'|E_3) = 1$. Polo tanto,

$$\begin{aligned} \Pr(m') &= \Pr(m'|E_1) \Pr(E_1) + \Pr(m'|E_2) \Pr(E_2) + \Pr(m'|E_3) \Pr(E_3) = \\ &= 0 \frac{1}{3} + 1 \frac{1}{3} + 1 \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (14)$$

e utilizando novamente a regra de Bayes, as probabilidades revisadas son

$$\tilde{\mu}_1 = \Pr(E_1|m') = \frac{\Pr(m'|E_1)\Pr(E_1)}{\Pr(m')} = \frac{(0)(\frac{1}{3})}{\frac{2}{3}} = 0 \quad (15)$$

$$\tilde{\mu}_2 = \Pr(E_2|m') = \frac{\Pr(m'|E_2)\Pr(E_2)}{\Pr(m')} = \frac{(1)(\frac{1}{3})}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \quad (16)$$

e

$$\tilde{\mu}_3 = \Pr(E_3|m') = \frac{\Pr(m'|E_3)\Pr(E_3)}{\Pr(m')} = \frac{(1)(\frac{1}{3})}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \quad (17)$$

■

EXEMPLO 2 (*Regra de Bayes e revisión do sistema de crenzas iniciais*) O Gran Burato está situado a 250 km das costas de Galicia, é o maior cráter mariño do mundo e crese que pode albergar grandes cantidades de gas. Temos que decidir se perforar ou non para determinar se contén gas. A decisión dependerá da nosa estimación da probabilidade de que haxa gas. Inicialmente, hai tres posibles estados: E_1 ou estado bo, no que a probabilidade de que haxa gas é do 90%, E_2 ou estado intermedio, no que a probabilidade é do 40%, e E_3 vou estado malo, no que a probabilidade é do 0%. O sistema de crenzas a priori sobre os distintos estados é $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5})$.

Para ter máis información ca a inicial, efectuamos unha prospección de proba, a cal pode producir dúas mensaxes: a mensaxe m (a prospección permite anunciar que hai gas) ou a mensaxe m' (a prospección permite anunciar que non hai gas). A prospección é unha mostra aleatoria, polo que para cada un dos estados posibles as probabilidades das diferentes mensaxes son as reflectidas na táboa 1.

Táboa 1: Probabilidades de cada mensaxe.

	Mensaxe	
	m	m'
E_1	0,9	0,1
E_2	0,4	0,6
E_3	0	1

e onde o valor 0,9 é $\Pr(m|E_1)$, o valor 0,4 é $\Pr(m|E_2)$, etc.⁶ Calcúlense as crenzas revisadas con cada unha das dúas mensaxes que se poden recibir.

⁶ A prospección non é un test perfecto, xa que pode indicar que hai gas aínda que en realidade non o haxa (falso positivo) ou indicar que non hai gas, aínda que en realidade si que o hai (falso negativo).

DISCUSIÓN Para revisar o sistema de crezas iniciais utilizamos a regra de Bayes. Se a mensaxe que recibimos é m , primeiro calculamos $\Pr(m)$ utilizando a probabilidade total

$$\begin{aligned} \Pr(m) &= \Pr(m|E_1) \Pr(E_1) + \Pr(m|E_2) \Pr(E_2) + \Pr(m|E_3) \Pr(E_3) \\ &= (0,9)(0,1) + (0,4)(0,5) + (0)(0,4) = 0,29 \end{aligned} \quad (18)$$

co cal as probabilidades revisadas son

$$\hat{\mu}_1 = \Pr(E_1|m) = \frac{\Pr(m|E_1) \Pr(E_1)}{\Pr(m)} = \frac{(0,9)(0,1)}{0,29} = 0,3103 \quad (19)$$

$$\hat{\mu}_2 = \Pr(E_2|m) = \frac{\Pr(m|E_2) \Pr(E_2)}{\Pr(m)} = \frac{(0,4)(0,5)}{0,29} = 0,6897 \quad (20)$$

e

$$\hat{\mu}_3 = \Pr(E_3|m) = \frac{\Pr(m|E_3) \Pr(E_3)}{\Pr(m)} = \frac{(0)(0,4)}{0,29} = 0 \quad (21)$$

Por outra parte, se recibimos a mensaxe m' , calculamos $\Pr(m') = 0,71$ e logo, utilizando a regra de Bayes, obtemos as crezas a posteriori como

$$\tilde{\mu}_1 = \Pr(E_1|m') = \frac{\Pr(m'|E_1) \Pr(E_1)}{\Pr(m')} = \frac{(0,1)(0,1)}{0,71} = 0,0141 \quad (22)$$

$$\tilde{\mu}_2 = \Pr(E_2|m') = \frac{\Pr(m'|E_2) \Pr(E_2)}{\Pr(m')} = \frac{(0,6)(0,5)}{0,71} = 0,4225 \quad (23)$$

e

$$\tilde{\mu}_3 = \Pr(E_3|m') = \frac{\Pr(m'|E_3) \Pr(E_3)}{\Pr(m')} = \frac{(1)(0,4)}{0,71} = 0,5634 \quad (24)$$

En definitiva, a partir do sistema de crezas iniciais $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5})$ a mensaxe m (que anuncia que a prospección atopa gas) fai que revisemos estas crezas a $(\hat{\mu}_1; \hat{\mu}_2; \hat{\mu}_3) = (0,3103; 0,6897; 0)$ e a mensaxe m' (que anuncia que a prospección non atopa gas) fai que as revisemos a $(\tilde{\mu}_1; \tilde{\mu}_2; \tilde{\mu}_3) = (0,0141; 0,4225; 0,5634)$. ■

EXEMPLO 2 (Continuación) Agora só hai dous posibles estados, E_1 (hai gas) e E_2 (non hai gas), sendo as probabilidades iniciais $\Pr(E_1) = 0,2$ e $\Pr(E_2) = 0,8$. Se perforamos e atopamos gas, gañamos 1.000. Se perforamos e non hai gas, perdemos 400. Finalmente, se decidimos non perforar, incorremos nun custo de 50. Se somos neutrais ao risco, canto pagaríamos por un estudo xeolóxico do terreo que nos pode dar dúas mensaxes posibles, m (“hai gas”) ou m' (“non hai gas”)?

DISCUSIÓN Se non temos ningún estudo xeolóxico, decidiremos non perforar. A razón é que se perforamos obtemos unha ganancia esperada de $(0,2)(1.000) + (0,8)(-400) = -120$, mentres que se non perforamos perdemos só 50. Así pois,

sen información adicional coa que poidamos revisar as nosas crenzas iniciais, a decisión óptima é non perforar e o pago obtido é -50.

Agora, para coñecer a nosa disposición a pagar por un estudo xeolóxico que permita revisar as nosas crenzas, supoñamos que as probabilidades que asignamos a recibir cada mensaxe informativa deste estudo en cada estado son as dadas na táboa 2.

Táboa 2: Probabilidade de recibir cada mensaxe en cada estado

$\Pr(m E_i)$	m	m'
E_1	0,7	0,3
E_2	0,1	0,9

É dicir, $\Pr(m|E_1) = 0,7$, $\Pr(m|E_2) = 0,1$, etc. A partir de aquí, se utilizamos unha vez máis o teorema da probabilidade total, podemos calcular

$$\Pr(m) = \Pr(m|E_1)\Pr(E_1) + \Pr(m|E_2)\Pr(E_2) = (0,7)(0,2) + (0,1)(0,8) = 0,22 \quad (25)$$

e

$$\Pr(m') = \Pr(m'|E_1)\Pr(E_1) + \Pr(m'|E_2)\Pr(E_2) = (0,3)(0,2) + (0,9)(0,8) = 0,78 \quad (26)$$

A matriz de probabilidades a posteriori pódese obter utilizando (25), (26) e a regra de Bayes que construímos. O resultado é o dado na táboa 3.

Táboa 3: Sistema de crenzas a posteriori

$\Pr(E_i m)$	m	m'
E_1	0,6364	0,0769
E_2	0,3636	0,9231

Finalmente, para calcular a disposición a pagar polo estudo xeolóxico, utilizamos as probabilidades a posteriori da táboa 4. Se a mensaxe que recibimos do estudo é m , a ganancia esperada de perforar é $(0,6364)(1.000) + (0,3636)(-400) = 490,96$, polo que a decisión óptima será perforar. Polo contrario, se a mensaxe que recibimos é m' , a ganancia esperada de perforar é $(0,0769)(1.000) + (0,9231)(-400) = -292,34$ e o mellor será non perforar, e nese caso a ganancia será -50.

En definitiva, o pago en termos ex-ante coa información adicional do estudo é $(0,22)(490,96) + (0,78)(-50) = 69,01$. Polo tanto, o valor da información proporcionada polo estudo xeolóxico é, neste caso, $69,01 - (-50) = 119,01$ e estaremos dispostos a pagar, como máximo, esta cantidade pola realización do estudo xeolóxico. ■

EXEMPLO 3 (*Valor da información completa e incompleta*) Un individuo neutral ao risco debe decidir entre tres posibles accións $\{a_1, a_2, a_3\}$. O pago que obtén de cada unha delas depende do estado da natureza que ocorra e que pode ser E_1 , E_2 ou E_3 . As crenzas iniciais do individuo sobre os estados son que teñen a mesma probabilidade de ocorrencia, é dicir, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Finalmente, os pagos das accións condicionadas a cada estado veñen dados na táboa 4.

Táboa 4: Ganancia do individuo

	E_1	E_2	E_3
a_1	1	4	10
a_2	5	2	9
a_3	6	3	2

onde 1 é o pago obtido levando a cabo a acción a_1 se o estado que ocorre é E_1 , 5 é o pago obtido levando a cabo a acción a_1 se o estado que ocorre é E_2 , etc. Calcúlese o valor da información (completa e incompleta) que pode recibir o individuo sobre o estado que ocorrerá.

DISCUSIÓN Adoptemos como punto de referencia a situación na que o individuo non ten información coa que actualizar as súas crenzas a priori. Neste caso, o pago esperado que lle proporciona cada acción é, segundo as crenzas que ten sobre os estados,

$$\pi(a_1) = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}4 + \frac{1}{3}10 = 5 \quad (27)$$

$$\pi(a_2) = \frac{1}{3}5 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}9 = \frac{16}{3} \quad (28)$$

e

$$\pi(a_3) = \frac{1}{3}6 + \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}2 = \frac{11}{3} \quad (29)$$

Polo tanto, a decisión óptima é elixir a acción a_2 e $\pi(a_2) = \frac{16}{3}$ é o beneficio que reporta.

Consideremos agora que o individuo recibe información completa de cal será o estado que ocorrerá. Neste caso, adoptará a decisión a_3 se o estado que anuncia a mensaxe é E_1 e adoptará a decisión a_1 se o estado anunciado é E_2 ou ben E_3 . Dado que o individuo pensa que todos os estados son equiprobables, é lóxico que tamén crea que a probabilidade de que o servizo de información completa anuncie que vai ocorrer o estado E_1 sexa $\frac{1}{3}$, o estado E_2 sexa $\frac{1}{3}$ e o estado E_3 sexa tamén $\frac{1}{3}$. O beneficio en termos ex-ante que se consegue tendo este servizo de información completa é, pois, $\frac{1}{3}6 + \frac{1}{3}4 + \frac{1}{3}10 = \frac{20}{3}$. En consecuencia, o valor da información completa é $\frac{20}{3} - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$.

Supoñamos, de forma alternativa á anterior, que o servizo non indica que estado ocorrerá, senón unicamente se ocorrerá ou non o estado E_2 (información incompleta). Neste caso, o individuo adoptará a acción a_1 se o servizo anuncia que ocorrerá E_2 , e será 4 o pago que espera obter. Polo contrario, se o servizo anuncia que non ocorrerá E_2 , o individuo asignará probabilidade $\frac{1}{2}$ á ocorrencia de cada un dos estados restantes. Polo tanto, elixindo a_1 espera gañar $\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}10 = \frac{11}{2}$, elixindo a_2 espera gañar $\frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}9 = 7$ e elixindo a_3 espera gañar $\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}2 = 4$. O óptimo é, pois, elixir a_2 se o servizo de información di que non ocorrerá E_2 , e será 7 o beneficio que obtén en termos ex-ante.

De acordo co seu sistema de crenzas a priori, o individuo espera recibir a mensaxe de que ocorrerá o estado E_2 con probabilidade $\frac{1}{3}$ e espera recibir a mensaxe de que non se producirá o estado E_2 con probabilidade $\frac{2}{3}$. En consecuencia, o seu beneficio, en termos ex-ante, co servizo de información incompleta é $\frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}7 = \frac{18}{3}$.

Finalmente, se comparamos este beneficio co que se obtén cando non existe ningún tipo de información coa que actualizar o sistema de crenzas iniciais, é inmediato que o individuo estará disposto a pagar por este servizo de información incompleta, como máximo, a cantidade $\frac{18}{3} - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$.

Toda esta discusión permítenos chegar ao resultado da seguinte proposición.

Proposición 1. *Un servizo de información completa ten máis valor ca un de información incompleta.*

□

No caso discutido no exemplo 2 o individuo está disposto a pagar por un servizo de información completa ata $\frac{2}{3}$ máis que por un de información incompleta.

4. A flexibilidade das opcións elixidas nun contexto dinámico

Ás veces, a chegada de nova información fai que poida ser óptimo adoptar inicialmente decisións flexibles que poidan logo ser modificadas de forma gratuíta ou incorrendo nun custo reducido. Consideremos unha situación na que un determinado axente debe elixir entre alternativas que producen ganancias en dous períodos de tempo, $t = 1, 2$. As ganancias do segundo período descóntanse co factor δ , $\delta \in (0, 1]$. Analicemos como pode ser interesante elixir unha acción no presente ($t = 1$) e outra acción diferente no futuro ($t = 2$). A posibilidade de facer isto depende fundamentalmente da flexibilidade da acción que se adopte inicialmente.

Definición 2. *Unha acción é totalmente flexible cando o custo de cambiar a outra acción distinta é nulo e é irreversible cando o custo é prohibitivamente (infinitamente) alto.*

EXEMPLO 4 (*Valor da flexibilidade e custos de cambio*) Un individuo ten que elixir entre tres alternativas $\{a_1, a_2, a_3\}$. O horizonte de elección é de dous períodos, $t = 1, 2$, e as ganancias que produce cada alternativa en $t = 2$ son incertas. Ao final de $t = 1$ o individuo recibe información que resolve total ou parcialmente a incerteza sobre as ganancias de $t = 2$. As tres alternativas teñen diferentes graos de flexibilidade: a_1 é totalmente flexible, mentres que a_2 e a_3 son totalmente irreversibles. En $t = 2$ pode ocorrer o estado E_1 ou ben o estado E_2 . O individuo cre que E_1 ocorrerá con probabilidade 0,6. Por último, as ganancias de cada acción (en función dos estados) son as que aparecen reflectidas na táboa 5.

Táboa 5: Ganancias en cada período

	$t = 1$	$t = 2$	
		E_1	E_2
a_1	10	12	8
a_2	9	18	10
a_3	15	5	20

- (i) Nun contexto no que non se desconta o futuro, que elixe o individuo en cada período se non recibe ningunha información adicional ao final de $t = 1$?
- (ii) Como resulta afectada a elección realizada en (i) se recibe información adicional completa ao final de $t = 1$? E se a información que recibe é incompleta?
- (iii) E se hai custos de cambio?
- (iv) Que sucede se se desconta o futuro?

DISCUSIÓN

(i) Dado que a acción a_1 é flexible, mentres que as accións a_2 e a_3 son irreversibles, o individuo pode elixir entre os cursos de acción (a_1, a_1) , (a_1, a_2) , (a_1, a_3) , (a_2, a_2) e (a_3, a_3) . As ganancias esperadas con cada un deles son

$$\pi(a_1, a_1) = 10 + (0,6)(12) + (0,4)(8) = 20,4 \tag{30}$$

$$\pi(a_1, a_2) = 10 + (0,6)(18) + (0,4)(10) = 24,8 \tag{31}$$

$$\pi(a_1, a_3) = 10 + (0,6)(5) + (0,4)(20) = 21 \tag{32}$$

$$\pi(a_2, a_2) = 9 + (0,6)(18) + (0,4)(10) = 23,8 \tag{33}$$

e

$$\pi(a_3, a_3) = 15 + (0,6)(5) + (0,4)(20) = 26 \tag{34}$$

Polo tanto, o óptimo é elixir o curso de acción (a_3, a_3) , que prescribe adoptar a decisión a_3 tanto no presente coma no futuro.

(ii) Supoñamos agora que ao final de $t = 1$ o individuo recibe información completa sobre que estado ocorrerá en $t = 2$. A mensaxe di que ocorrerá E_1 ou ben E_2 . Como inicialmente cre que a probabilidade de E_1 é 0,6, é lóxico que tamén crea que con probabilidade 0,6 a información indique que o estado en $t = 2$ será E_1 , e nese caso quererá tomar a acción a_2 neste período, e que con probabilidade 0,4 crea que indicará E_2 , e neste caso quererá elixir a_3 neste período.

Agora ben, para poder elixir así en $t = 2$, deberá elixir a_1 en $t = 1$, xa que é a única acción totalmente flexible e que permite cambiar a outra distinta no segundo período. Polo tanto, a elección será

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \text{ en } t = 1 \text{ e } a_2 \text{ en } t = 2 \text{ se ao final de } t = 1 \text{ se recibe a mensaxe de} \\ \text{que ocorrerá o estado } E_1 \\ a_1 \text{ en } t = 1 \text{ e } a_3 \text{ en } t = 2 \text{ se ao final de } t = 1 \text{ se recibe a mensaxe de} \\ \text{que ocorrerá o estado } E_2 \end{array} \right\} \quad (35)$$

A ganancia en termos ex-ante deste curso de acción é

$$E[\pi] = 10 + (0,6)(18) + (0,4)(20) = 28,8 \quad (36)$$

que é maior ca a ganancia esperada cando non se recibía información completa ao final de $t = 1$, e elixía (a_3, a_3) , que era 26. Polo tanto, o valor da flexibilidade cando a información adicional recibida ao final do primeiro período é completa é $28,8 - 26 = 2,8$.

Consideremos agora que a información recibida ao final de $t = 1$ é incompleta e, polo tanto, só permite resolver parcialmente a incerteza. Supoñamos que o axente pode recibir a mensaxe m ou a mensaxe m' . Se recibe a mensaxe m cre que a probabilidade de ocorrencia do estado E_1 aumenta de 0,6 a $\Pr(E_1|m) = 0,8$; polo contrario, se recibe a mensaxe m' cre que a probabilidade do estado E_1 se reduce de 0,6 a $\Pr(E_1|m') = 0,3$. Utilizando o teorema da probabilidade total, podemos calcular a probabilidade de recibir a mensaxe m a partir de

$$\Pr(E_1) = \Pr(E_1|m) \Pr(m) + \Pr(E_1|m') \Pr(m') \quad (37)$$

co cal a dita probabilidade é

$$0,6 = (0,8) \Pr(m) + (0,3)(1 - \Pr(m)) \Rightarrow \Pr(m) = \frac{3}{5} \quad (38)$$

Da mesma forma, calculamos $\Pr(m')$ a partir de

$$\Pr(E_2) = \Pr(E_2|m') \Pr(m') + \Pr(E_2|m) \Pr(m) \quad (39)$$

é dicir,

$$0,4 = (0,7) \Pr(m') + (0,2) (1 - \Pr(m')) \quad (40)$$

de onde $\Pr(m') = \frac{2}{5}$. Analicemos, por último, que acción adoptará o individuo para cada posible mensaxe que reciba ao final de $t = 1$. Unha vez determinado o curso de acción óptimo, poderemos calcular o valor da flexibilidade.

Se a mensaxe que recibe ao final de $t = 1$ é m , entón adoptando a acción a_1 en $t = 2$ espera gañar neste período $0,8(12) + 0,2(8) = 9,76$, coa acción a_2 espera gañar 16,4 e coa acción a_3 espera gañar 8. Polo tanto, se a mensaxe que recibe é m , tomará a acción a_2 en $t = 2$. Polo contrario, se a mensaxe que recibe ao final de $t = 1$ é m' , entón adoptando a acción a_1 espera gañar $0,3(12) + 0,7(8) = 9,2$, adoptando a acción a_2 espera gañar 12,4 e adoptando a acción a_3 espera gañar 15,5. En definitiva, elixirá a acción a_3 en $t = 2$.

Agora ben, para poder elixir a_2 en $t = 2$ se a mensaxe é m e a_3 se a mensaxe é m' , o individuo debe elixir en $t = 1$ a acción a_1 , xa que é a única flexible. Con iso espera gañar

$$10 + \frac{3}{5}(16,4) + \frac{2}{5}(15,5) = 26,04 \quad (41)$$

e, en consecuencia, o valor da flexibilidade é a diferenza coa ganancia esperada sen información, é dicir, $26,04 - 26 = 0,04$.

Toda esta discusión pódese resumir na seguinte proposición.

Proposición 2.

- (a) *A flexibilidade é valiosa.*
 (b) *O valor da flexibilidade cando a información adicional que se recibe é completa é maior que cando é incompleta.*

(iii) Agora supoñamos que existen custos de cambio cando en $t = 2$ queremos adoptar unha estratexia distinta da adoptada en $t = 1$. Se o individuo cambia a acción a_1 por outra distinta, incorre nun custo. En concreto, o custo de cambiar a_1 por a_2 é 1 e o de cambiar a_1 por a_3 é 2. Como afecta este custo ao valor da flexibilidade? Agora a ganancia esperada é

$$E[\pi] = 10 + (0,6)(18 - 1) + (0,4)(20 - 2) = 27,4 \quad (42)$$

e, en consecuencia, o valor da flexibilidade vese reducido ata $27,4 - 26 = 1,4$.

Proposición 3. *O valor da flexibilidade é tanto menor canto maior é o custo de cambio da alternativa flexible.*

É inmediato deducir de (45) que, se os custos de cambiar a alternativa flexible por outra distinta son suficientemente altos, é posible que non compense elixir inicialmente a alternativa flexible para logo ter que cambiala por outra. Por exemplo,

se o custo de cambiar a_1 por a_2 é 8 e o custo de cambiar a_1 por a_3 é 10, a ganancia esperada é

$$E[\pi] = 10 + (0,6)(18 - 8) + (0,4)(20 - 10) = 20 \quad (43)$$

que é un resultado peor ca o ofrecido polo curso de acción (a_3, a_3) . Así pois, con estes custos de cambio, o individuo decantarase por elixir un curso de acción irreversible como a_3 .

(iv) Supoñamos agora que o individuo desconta o futuro, sendo $0 < \delta < 1$ a taxa de desconto. Neste caso, o beneficio ex-ante cando ao final de $t = 1$ non recibe información sobre as ganancias que obterá en $t = 2$ é

$$\pi(a_1, a_1) = 10 + \delta[(0,6)(12) + (0,4)(8)] = 10 + 10,4\delta \quad (44)$$

$$\pi(a_2, a_2) = 9 + 14\delta \quad (45)$$

e

$$\pi(a_3, a_3) = 15 + 11\delta \quad (46)$$

Polo tanto, o individuo elixirá (a_3, a_3) , é dicir a_3 no presente e a_3 tamén no futuro, é dicir, a_3 para sempre.

Cando o individuo recibe información completa ao final de $t = 1$, se elixe inicialmente a_1 e logo cambia a a_2 se a mensaxe que lle chega é m ou a a_3 se é m' , entón o beneficio que espera obter é

$$E[\pi] = 10 + \delta[(0,6)(18) + (0,4)(20)] = 10 + \frac{94}{5}\delta \quad (47)$$

e comparando (47) con (46) obtense que o valor da flexibilidade en presenza de información completa ao final de $t = 1$ é

$$V = \frac{39}{5}\delta - 5 \quad (48)$$

Se nos limitamos a valores do parámetro de desconto tales que $\delta > \frac{25}{39}$ para que $V > 0$ en (48), entón o valor da flexibilidade é máximo cando $\delta = 1$,⁷ mentres que é mínimo cando $\delta = 0,641$.

Proposición 4. *O valor da flexibilidade é maior canto menos se desconte o futuro. Formalmente, $\frac{\partial V}{\partial \delta} > 0$.*

□

⁷ No caso límite no que non se desconta o futuro (é dicir, $\delta = 1$), o valor é $V = 2,8$, que é o resultado que estableceramos anteriormente.

EXEMPLO 4 (Continuación) Supoñamos, no contexto do exemplo 4, que as ganancias en cada período son as dadas na táboa 6.

Táboa 6: Ganancias en cada período

	$t = 1$	$t = 2$	
		E_1	E_2
a_1	8	10	7
a_2	10	17	4
a_3	11	2	20

Sexa tamén $\Pr(E_1)=0,6$, $\Pr(E_1|m)=0,9$ e $\Pr(E_1|m') = 0,2$. Determinar o curso óptimo de acción en función da taxa de desconto δ cando o individuo:

- (i) non recibe información adicional ao final do primeiro período.
- (ii) ao final de $t = 1$ recibe a mensaxe m (que indica que ocorrerá o estado E_1 en $t = 2$) ou a mensaxe m' (que indica que ocorrerá o estado E_2 en $t = 2$).

DISCUSIÓN

(i) Cando o individuo non recibe información adicional ao final de $t = 1$ os beneficios esperados son

$$\pi(a_1, a_1) = 10 + \delta[(0,6)(10) + (0,4)(7)] = 8 + \frac{44}{5} \delta \tag{49}$$

$$\pi(a_2, a_2) = 10 + \delta[(0,6)(17) + (0,4)(4)] = 10 + \frac{59}{5} \delta \tag{50}$$

e

$$\pi(a_3, a_3) = 11 + \delta[(0,6)(2) + (0,4)(20)] = 11 + \frac{46}{5} \delta \tag{51}$$

e a partir de (49)-(51) é inmediato ver que o individuo nunca escollerá o curso de acción (a_1, a_1) , xa que os beneficios que este rende están dominados polos que rende o curso de acción (a_2, a_2) ou o curso (a_3, a_3) . De feito, para resolver o problema

$$\max \{ \pi(a_2, a_2), \pi(a_3, a_3) \} = \max \left\{ 10 + \frac{59}{5} \delta, 11 + \frac{46}{5} \delta \right\} \tag{52}$$

elixirá da forma indicada na seguinte proposición.

Proposición 5. *Se o individuo non recibe información adicional ao final de $t = 1$ coa que actualizar o seu sistema de crenzas iniciais, entón elixe:*

- (a) o curso de acción (a_3, a_3) se $0 < \delta < \frac{5}{13}$.
- (b) o curso de acción (a_2, a_2) se $\frac{5}{13} < \delta < 1$.

É dicir, o individuo non elixe a alternativa flexible, senón que elixe unha das irreversibles en función de cal sexa a taxa de desconto temporal.

(ii) Cando o individuo recibe información ao final de $t = 1$ (a mensaxe m ou a mensaxe m') e iso lle serve para revisar as súas crenzas a priori sobre cada estado, podemos calcular a probabilidade de recibir a mensaxe m a partir de

$$\Pr(E_1) = \Pr(E_1|m) \Pr(m) + \Pr(E_1|m') \Pr(m') \quad (53)$$

co cal

$$0,6 = (0,9) \Pr(m) + (0,2)(1 - \Pr(m)) \Rightarrow \Pr(m) = \frac{4}{7} \quad (54)$$

Operando da mesma forma que en (53) e (54), podemos calcular $\Pr(m') = \frac{3}{7}$.

Por outra parte, se a mensaxe recibida ao final de $t = 1$ é m , coa acción a_1 o individuo espera gañar $(0,9)(10) + (0,1)(7) = 9,7$ en $t = 2$, coa acción a_2 espera gañar $(0,9)(17) + (0,1)(4) = 15,7$ e coa acción a_3 $(0,9)(2) + (0,1)(20) = 3,8$. En consecuencia, se a mensaxe recibida é m , a acción que tomará o individuo en $t = 2$ será a_2 . Da mesma forma, se a mensaxe que se recibe ao final de $t = 1$ é m' , coa acción a_1 o individuo espera gañar $(0,2)(10) + (0,8)(7) = 7,6$ en $t = 2$, coa acción a_2 espera gañar $(0,2)(17) + (0,8)(4) = 6,6$ e coa acción a_3 $(0,2)(2) + (0,8)(20) = 16,4$. Polo tanto, se a mensaxe recibida é m' , a acción que tomará o individuo en $t = 2$ será a_3 .

A partir de aquí, se o individuo elixe (a_1, a_2) cando a mensaxe que recibe ao final de $t = 1$ é m e elixe (a_1, a_3) cando a mensaxe que recibe é m' (é dicir, elixe a_1 inicialmente e logo pasa a elixir a_2 cando a mensaxe é m ou a_3 cando é m'), o beneficio que espera gañar é

$$8 + \delta \left[\frac{4}{7}(15,7) + \frac{3}{7}(16,4) \right] = 8 + 16\delta \quad (55)$$

e, comparando (55) e (52) chegamos á elección óptima.

Proposición 5 (continuación). *Cando o individuo desconta o futuro e, ademais, recibe información ao final do primeiro período, elixe:*

- (a) (a_3, a_3) se $0 < \delta < \frac{5}{13}$
- (b) (a_2, a_2) se $\frac{5}{13} < \delta < \frac{10}{21}$.
- (c) (a_1, a_2) se a mensaxe que recibe é m ou (a_1, a_3) se a mensaxe que recibe é m' cando $\frac{10}{21} < \delta < 1$.

É dicir, se o individuo desconta moito o futuro (no sentido de $\delta < \frac{10}{21}$), non elixe a alternativa flexible, calquera que sexa a mensaxe que reciba. A explicación é que as ganancias que obteña no futuro non importan moito e, polo tanto, ao individuo non lle interesa elixir a alternativa que lle permitirá “axustar” a súa elección no futuro. Pola contra, se desconta pouco o futuro (no sentido de $\delta < \frac{10}{21}$), as ganancias de $t = 2$ teñen unha grande importancia, polo que o individuo quererá optimizar o máis posible a elección en $t = 2$. Para iso, necesita adoptar a alternativa flexible en $t = 1$

e condicionar a alternativa elixida para $t = 2$ á información adicional que reciba ao final de $t = 1$ e que lle permitirá mellorar a precisión da información sobre o estado que ocorrerá en $t = 2$. \square

5. O valor da información sobre o prezo de mercado ao que se poderá vender a produción

Consideremos unha empresa que produce o nivel de output q e cuxos custos de produción son os dados pola función $C(q) = F + c(q)$, onde F é o custo fixo e $c(q)$ é o custo variable, con $c'(q) > 0$ e $c''(q) \geq 0$.⁸ A empresa coñece o proceso produtivo e o custo de producir cada nivel de output (non está sometida a incerteza tecnolóxica). Con todo, non coñece a demanda de mercado, polo que se ve obrigada a decidir o output q que vai producir antes de coñecer o prezo p que xurdirá no mercado e ao cal poderá vendelo. Formalmente, o prezo de mercado é $\tilde{p}(Q) = a - Q + \varepsilon$, onde ε é unha variable aleatoria. O único que sabe a empresa é a función de distribución de \tilde{p} . Só son posibles os niveis de prezos p_1 e p_2 ($p_1 < p_2$) e as crenzas iniciais son μ_1 e $\mu_2 = 1 - \mu_1$, respectivamente. A esperanza desta distribución de prezos é $E[\tilde{p}] = p = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2$.

Nestas circunstancias, o beneficio da empresa é

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= p_1 q - F - c(q), \text{ con probabilidade } \mu_1 \text{ (estado malo)} \\ \pi_2 &= p_2 q - F - c(q), \text{ con probabilidade } \mu_2 \text{ (estado bo)} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

e, para evitar solucións de esquina do tipo $q = 0$, suporemos que $E[\tilde{\pi}] = \bar{\pi} = \mu_1 \pi_1 + \mu_2 \pi_2 > 0$, o cal implica que $\bar{p} > c'(q)$ para $q = 0$.

A decisión óptima da empresa é producir o nivel de output q^* que resolve o problema

$$\max_q E[u(\pi(q))] = \mu_1 u(\pi_1(q)) + \mu_2 u(\pi_2(q)) \quad (57)$$

e cuxa CPO é

$$0 = \frac{dE[u(\pi(q))]}{dq} = \mu_1 u'(\pi_1)(p_1 - c'(q)) + \mu_2 u'(\pi_2)(p_2 - c'(q)) \quad (58)$$

Dado que $\mu_1 \in (0, 1)$, $\mu_2 \in (0, 1)$ e $u'(\cdot) > 0$, é evidente que para que se cumpra (58) os termos $p_1 - c'(q)$ e $p_2 - c'(q)$ deben ter signos opostos. En particular, xa que $p_1 < p_2$, entón $p_1 - c'(q) < 0$ e $p_2 - c'(q) > 0$.

Proposición 6. *O nivel óptimo de output baixo incerteza, q^* , é o que verifica a condición $p_1 < c'(q^*) < p_2$.*

O output que produce a empresa nun contexto de incerteza é maior ca o que produciría se soubese con seguridade que o prezo de mercado será p_1 e menor ca o que produciría se soubese con seguridade que o prezo de mercado será p_2 .

⁸ Isto implica que a función de beneficios, $\pi(q) = pq - F - c(q)$, é cóncava.

Como a empresa non sabe con certeza cal será a realización do prezo ao que poderá vender a súa produción no mercado, o que podemos facer é determinar o output que producirá e comparalo co que produciría nun contexto no que soubese que o prezo que existirá fose o prezo esperado.

Proposición 7. *O output que produce unha empresa prezo-aceptante nun contexto de incerteza, q^* , é:*

(i) *menor ca o que produciría se o prezo fose \bar{p} con certeza ($q^* < \bar{q}$), se a empresa ten despreferencia por risco.*

(ii) *Igual ao que produciría se o prezo fose \bar{p} con certeza ($q^* = \bar{q}$), se a empresa é neutral ao risco.*

(iii) *maior ca o que produciría se se lle garante o prezo \bar{p} con certeza ($q^* > \bar{q}$), se a empresa ten preferencia polo risco.*

Demostración Se a \bar{q} o nivel de output producido cando \bar{p} é o prezo seguro. É inmediato que \bar{q} é o output que se deriva de resolver o problema $\max_q u(\bar{p}q - F - c(q))$, o cal equivale a

$$\max_q \bar{p}q - F - c(q) \quad (59)$$

ao ser $u(\pi)$ unha transformación monótona crecente da riqueza (ou beneficio) final, xa que $u'(\pi) > 0$. Polo tanto, da CPO de (4) resulta $\bar{p} = c'(\bar{q})$. Por outra parte, se reescribimos a CPO (58) como

$$\mu_1 p_1 u'(\pi_1) + \mu_2 p_2 u'(\pi_2) - c'(q)(\mu_1 u'(\pi_1) + \mu_2 u'(\pi_2)) = 0 \quad (58a)$$

(onde a suma dos dous primeiros termos do lado esquerdo é a esperanza dun produto de dúas variables aleatorias \tilde{p} e \tilde{u}') e utilizamos a definición de covarianza

$$\text{Cov}(\tilde{p}, \tilde{u}') = \mu_1 (p_1 - \bar{p})(u'(\pi_1) - \bar{u}') + \mu_2 (p_2 - \bar{p})(u'(\pi_2) - \bar{u}') \quad (60)$$

entón a condición (58a) pódese reescribir como

$$\bar{p}(\mu_1 u'(\pi_1) + \mu_2 u'(\pi_2)) + \text{Cov}(\tilde{p}, \tilde{u}') = c'(q)(\mu_1 u'(\pi_1) + \mu_2 u'(\pi_2)) \quad (58b)$$

é dicir, como

$$\bar{p}E[u'(\tilde{\pi})] + \text{Cov}(\tilde{p}, \tilde{u}') = c'(q)E[u'(\tilde{\pi})] \quad (58c)$$

Finalmente, dividindo os dous lados de (58c) por $E[u'(\tilde{\pi})]$, resulta

$$\bar{p} + \frac{\text{Cov}(\tilde{p}, \tilde{u}')}{E[u'(\tilde{\pi})]} = c'(q) \quad (61)$$

como condición que caracteriza o óptimo da empresa en incerteza. A diferenza entre (61) e a condición que define o óptimo nunha situación de certeza é o termo $\frac{\text{Cov}(\bar{p}, \tilde{u}')}{E[u'(\tilde{\pi})]}$, cuxo denominador é positivo. A partir de aquí, temos o seguinte:

(i) Se a empresa ten aversión ao risco, entón $u''(\tilde{\pi}) < 0$ e $\text{Cov}(\bar{p}, \tilde{u}') < 0$. Ao aumentar o prezo ao que vende o output tamén aumenta a riqueza (o beneficio) final da empresa e diminúe a utilidade marxinal do beneficio, $u'(\tilde{\pi})$, xa que $u''(\tilde{\pi}) < 0$. Existe, pois, unha relación inversa entre o prezo p e u' , o cal implica unha covarianza negativa. Pois ben, o feito de que $\frac{\text{Cov}(\bar{p}, \tilde{u}')}{E[u'(\tilde{\pi})]} < 0$ pódese interpretar como o custo marxinal do risco: o prezo percibido por unha empresa que teña aversión ao risco é igual a \bar{p} menos un termo positivo e —de acordo cunha curva de custo marxinal crecente— a este prezo “neto de risco” inferior correspóndelle un nivel de produción inferior.

(ii) Se a empresa é neutral ao risco, entón $u''(\tilde{\pi}) = 0$ e, polo tanto, $\text{Cov}(\bar{p}, \tilde{u}') = 0$. En consecuencia, $q^* = \bar{q}$. A empresa agora compórtase coma se soubese con seguridade que o prezo de mercado será \bar{p} (a súa neutralidade ao risco lévao a ignorar o carácter aleatorio de \bar{p}).

(iii) Se a empresa ten preferencia polo risco, $u''(\tilde{\pi}) > 0$, e xa que logo, $\text{Cov}(\bar{p}, \tilde{u}') > 0$, resulta $\frac{\text{Cov}(\bar{p}, \tilde{u}')}{E[u'(\tilde{\pi})]} > 0$. O prezo percibido por unha empresa amante do risco é, pois, igual a \bar{p} máis un termo positivo. Logo, e de acordo cunha curva de custo marxinal crecente, a este prezo “neto de risco” superior correspóndelle unha produción maior. ■

A continuación analizamos a dispoñibilidade a pagar da empresa por coñecer o prezo ao que poderá vender o output que produce. Para iso, consideremos un servizo de información ou asesoría en cuxa predición a empresa confía plenamente. Se o asesor revela que o prezo será p_1 , a empresa resolve o problema

$$\max_{q_1} u(p_1 q_1 - c(q_1)) - F \tag{62}$$

é dicir,

$$\max_{q_1} p_1 q_1 - c(q_1) - F \tag{62a}$$

en cuxo caso q_1 é tal que $p_1 = c'(q_1)$, co cal $\pi_1^* = p_1 q_1^* - c(q_1^*) - F$. Analogamente, se o prezo que anuncia o asesor é p_2 , entón $\pi_2^* = p_2 q_2^* - c(q_2^*) - F$.

É dicir, a incerteza sobre o prezo non se elimina polo feito de acudir ao experto, pero a forma de elixir o output si cambia: sen a información do asesor, determínase de xeito único (o nivel de output é q^* do apartado anterior), mentres que coa información, a empresa decide entre q_1^* e q_2^* , segundo o consello dado polo asesor.

Dado que antes de consultar ao asesor a empresa está en incerteza, avaliará a súa situación en termos de utilidade esperada. Se ten información, a súa utilidade esperada é

$$Eu_I = \mu_1 u(\pi_1^*) + \mu_2 u(\pi_2^*) \tag{63}$$

mentres que se non ten información, entón

$$Eu_{NI} = \mu_1 u(p_1 q^* - c(q^*) - F) + \mu_2 u(p_2 q^* - c(q^*) - F) \quad (64)$$

e sucede que $\pi_1^* > p_1 q^* - c(q^*) - F$ (porque q^* non é óptimo para un p_1 certo) e $\pi_2^* > p_2 q^* - c(q^*) - F$ (porque q^* non é óptimo para un p_2 certo). Entón, $Eu_I > Eu_{NI}$, co cal se demostra que a información ten valor.

Para determinar o valor exacto da información, V , formulamos a condición $Eu_I - V = Eu_{NI}$, é dicir,

$$\mu_1 u(\pi_1^* - V) + \mu_2 u(\pi_2^* - V) = Eu_{NI} \quad (65)$$

e resolvendo en V , obtense a disposición máxima a pagar pola información completa sobre o prezo.

6. A incerteza e o papel dos mercados de futuros

O prezo dun produto no mercado ao contado pode ser extremadamente volátil. Nos mercados de futuros, en cambio, o prezo é fixo. En consecuencia, os mercados de futuros son unha institución útil para as empresas aversas ao risco porque, grazas a eles, toman a decisión de produción en incerteza coma se estivesen nun contexto de certeza.

Supoñamos que a empresa determina o nivel de output q sen saber o prezo que existirá no momento de vendelo. No mercado ao contado o prezo é unha variable aleatoria que pode tomar os valores p_1 ou p_2 . Ademais de no mercado ao contado, o produto pode ser vendido nun mercado de futuros a un prezo estipulado de antemán, p_f , o cal implica que neste mercado non existe risco. Supoñamos que q_f é a cantidade vendida a través do mercado de futuros (e $q - q_f$ a que se vende no mercado ao contado). Polo tanto, se $q - q_f > 0$, a empresa leva unha parte do seu output ao mercado de futuros (é vendedor no mercado ao contado). Polo contrario, se $q - q_f < 0$, a empresa vende no mercado de futuros unha cantidade de output superior á que produce, co cal se converterá en comprador ao vencemento do contrato (deixa de ser vendedor) no mercado ao contado.

O problema da empresa consiste en

$$\max_{q, q_f} E[u] = \mu u(p_f q_f + p_1(q - q_f) - c(q) - F) + (1 - \mu)u(p_f q_f + p_2(q - q_f) - c(q) - F) \quad (66)$$

e as correspondentes CPO son

$$0 = \frac{\partial E[u]}{\partial q_f} = \mu u'(\pi_1)(p_f - p_1) + (1 - \mu)u'(\pi_2)(p_f - p_2) \quad (67)$$

e

$$0 = \frac{\partial E[u]}{\partial q} = \mu u'(\pi_1)(p_1 - c'(q)) + (1 - \mu)u'(\pi_2)(p_2 - c'(q)) \quad (68)$$

onde π_1 e π_2 son os valores da riqueza ou beneficio final da empresa en cada estado.

Lema 1. $p_1 < p_f < p_2$ para que exista unha solución finita ao problema (66).

Demostración Supoñamos que $p_f < p_1$ (polo que $p_f < p_2$). Neste caso, (67) convértese en $\frac{\partial E[u]}{\partial q_f} < 0$ e a empresa tería incentivo a reducir q_f e a que sexa o máis negativo posible. É dicir, a empresa realizaría sen límite compras aprazadas: compraría no mercado de futuros e revendería no mercado ao contado, co que obtería un beneficio.

Supoñamos agora que $p_f > p_2$ (polo que $p_f > p_1$). Neste caso, (67) convértese en $\frac{\partial E[u]}{\partial q_f} > 0$ (e a empresa podería comprar no mercado ao contado a un prezo inferior ao que vende no mercado de futuros). Como esta é unha operación sen risco ningún que implica beneficio, a empresa tería incentivo a desenvolver sen límite as súas vendas aprazadas.

En definitiva, para que o nivel de output que se vende (de maneira aprazada) no mercado de futuros adopte un valor finito, é necesario que a empresa (sexa vendedor no mercado de futuros) soporte un risco, o cal sucede se $p_1 < p_f < p_2$. ■

As CPO (67) e (68) permiten determinar q e q_f . Se as reescribimos como

$$p_f [\mu u'(\pi_1) + (1 - \mu)u'(\pi_2)] = \mu p_1 u'(\pi_1) + (1 - \mu)p_2 u'(\pi_2) \quad (67a)$$

e

$$c'(q) [\mu u'(\pi_1) + (1 - \mu)u'(\pi_2)] = \mu p_1 u'(\pi_1) + (1 - \mu)p_2 u'(\pi_2) \quad (68a)$$

obtense

$$c'(q) = p_f \quad (69)$$

Así pois, grazas ao mercado de futuros a empresa toma a decisión de produción baixo incerteza coma se estivese nun contexto de certeza, no sentido de que o output óptimo é o que satisfai a condición (69) e na cal p_f é coñecido con certeza.

O anterior significa que o risco sobre o prezo corrente non ten por que afectar a unha empresa aversa ao risco no momento de decidir o nivel de output que vai producir; só lle afecta cando “reparte” o output producido entre a cantidade que leva ao mercado ao contado e a que leva ao mercado de futuros.

Proposición 8. *As decisións da cantidade que se vai producir, q , e a cantidade que se vai vender a través do mercado de futuros, q_f , están “separadas”. Primeiro, determina sobre a base de p_f , de acordo coa condición (69), e logo determina a cantidade q_f que verifica (67).*

EXEMPLO 5. Unha empresa con aversión absoluta ao risco decrecente e cuxa función de utilidade esperada é logarítmica, $u(\pi) = \ln \pi$, produce un ben e incorre nos custos dados pola función $c(q) = 100 + 20q$. A capacidade máxima que ten instalada é de

50 unidades. O prezo do ben é incerto e a crenza inicial da empresa é tal que asigna probabilidade 0,5 a que o prezo será $p_1 = 10$ (estado malo) e probabilidade 0,5 a que será $p_2 = 40$ (estado bo). A riqueza inicial da empresa é $w_0 = 1100$.

(i) Determinéñese a produción óptima desta empresa.

(ii) Que cantidade produciría a empresa se o prezo medio fose o prezo certo?

(iii) Que sucede con respecto á cantidade calculada en (i) se aumenta o custo fixo da empresa a $F = 200$?

(iv) Consideremos, por último, que a empresa consegue colocar no mercado de futuros todo ou parte do seu output. Se o prezo nese mercado é $p_f = 22$, ¿que cantidade producirá e que cantidade venderá a través do mercado ao contado e a través do de futuros?

DISCUSIÓN

(i) O nivel óptimo de produción é o que resolve o problema

$$\begin{aligned} \max_q E [u(\pi)] &= \frac{1}{2} \ln(1100 + (10 - 20)q - 100) + \\ &+ \frac{1}{2} \ln(1100 + (40 - 20)q - 100) \end{aligned} \quad (70)$$

e a CPO

$$-\frac{1}{2} \frac{10}{1000-10q} + \frac{1}{2} \frac{20}{1000+20q} = 0 \quad (71)$$

dá lugar a $q^* = 25$.

(ii) Supoñamos agora que a empresa sabe que o prezo (prezo garantido ou prezo certo) é o prezo medio $\bar{p} = 25$. Neste caso, $\bar{q} = 50$ e o beneficio é $\pi = 150$.

(iii) Se o custo fixo aumenta e pasa a ser $F = 200$, entón a nova CPO sería

$$-\frac{1}{2} \frac{10}{900-10q} + \frac{1}{2} \frac{20}{900+20q} = 0 \quad (72)$$

e $q^* = 22,5$. É dicir, unha empresa con aversión absoluta ao risco decrecente (coma a que temos) decide producir unha menor cantidade cando aumentan os seus custos fixos.

(iv) A empresa producirá o máximo output posible, $q = 50$. A explicación é que a produción q está determinada por p_f , que é maior ca o custo marxinal. Polo tanto, é rendible producir a máxima cantidade posible. Unha vez que a empresa determinou o nivel de produción, decide a cantidade que vai vender no mercado de futuros, q_f , e a cantidade que vai vender no mercado ao contado, $q - q_f$. A partir de

$$\begin{aligned} \max_{q_f} E [u(\pi)] &= \frac{1}{2} \ln(1100 + 22q_f + 10(50 - q_f) - 1000 - 100) + \\ &+ \frac{1}{2} \ln(1100 + 22q_f + 40(50 - q_f) - 1000 - 100) \end{aligned} \quad (73)$$

a correspondente CPO dá lugar a $q_f = 36,11$ como a cantidade que a empresa vende no mercado de futuros. En consecuencia, a cantidade restante, $50 - q_f$, é a que vende a través do mercado ao contado. Dita cantidade é .⁹ ■

ACTIVIDADES PROPOSTAS

Ao longo desta UD vanse efectuar diferentes actividades que, nunha fase inicial, procurarán activar o interese e a curiosidade do alumnado sobre a unidade a través da conexión dos seus contidos coa realidade.

Con posterioridade, realizaranse actividades para coñecer a fondo e determinar de forma precisa a función de utilidade dos consumidores con preferencias específicas. A resolución destas actividades será individual e en grupo, motivarase o alumno para que explique o seu traballo ao resto dos alumnos, e fomentarase a crítica colectiva dos resultados acadados. Ao mesmo tempo, preténdese que no proceso de resolución o alumnado faga fincapé nas intuicións económicas que están detrás dos resultados formais acadados e que axudan a entendelos.

Ademais, facilitarase ao alumnado unha listaxe de actividades que deben resolver fóra da aula e de forma individual, e que despois deben presentar nas clases interactivas. Calquera dúbida sobre estas actividades será resolta nas titorías. Estas actividades serán do tipo das seguintes:

Actividade 1. A un individuo hipocondríaco fálase dunha enfermidade rara e terminal. A enfermidade afecta a un 0,01% da poboación e o individuo decide someterse a un test. O test non é perfecto. O 1% das veces di que un se encontra san a pesar de estar enfermo (falso negativo) e o 2% das veces di que un está enfermo aínda que en realidade está san (falso positivo). O test deu positivo e o individuo di que “se o test só se equivoca nun 2% de casos cando dá positivo, ten un 98% de probabilidade de morrer en breve”.

(i) É correcto o argumento do individuo?

(ii) Calcule, a través da regra de Bayes, a probabilidade exacta de que padeza a enfermidade.

Actividade 2 Unha empresa desenvolveu un novo produto e ten que decidir se o comercializa ou non. Os dous estados posibles son $\{E_1, E_2\}$, onde E_1 representa que o produto será un éxito de vendas e E_2 que vai ser un fracaso. Se o produto é un éxito de mercado, a empresa gaña 1.000, mentres que se é un fracaso, perde 200. A crenza a priori da empresa é $\mu_1 = \Pr(E_1) = 0,2$ e, polo tanto, $\mu_2 = \Pr(E_2) = 0,8$.

(i) Que decisión adoptará a empresa se non ten información adicional para actualizar o seu sistema de crenzas iniciais?

(ii) Supoñamos que a empresa pode facer un estudo de mercado co que revisar as crenzas iniciais. Canto pagará como máximo por un estudo deste tipo que lle facilite información completa? E se a información facilitada é só incompleta?

⁹ É doado de comprobar que esta cantidade diminúe se os custos fixos da empresan medran e pasan a ser, por exemplo, $F = 200$.

AVALIACIÓN DA UNIDADE

A avaliación desta unidade didáctica (e das outras que compoñen a materia) farase en tres fases:

a) A avaliación inicial, na que o profesor avalía os coñecementos previos do alumnado en temas de teoría económica do consumo a través de preguntas na aula.

b) A avaliación procesual, na que se avalía os alumnos pola asistencia ás sesións expositivas e a participación nas interactivas. Esta participación concretarase na resolución, presentación e discusión de casos prácticos e a realización de probas e traballos, co que deberán ir acreditando os coñecementos ao longo da unidade. En particular, o profesor levará un rexistro da participación de cada alumno, supervisará as actividades que realice, así como o traballo persoal fóra da aula. E cada certo tempo mostrará aos/ás alumnos/as a cualificación que van tendo en cada momento para que sexan conscientes do ritmo de participación que van levando. Deste xeito, a avaliación tradúcese nunha mestura da actividade interactiva e expositiva dos alumnos, polo que unha parte desa avaliación dependerá dos resultados que consigan os alumnos na resolución de casos reais ou ficticios, nas achegas que fagan nas aulas e nas discusións e interaccións que se produzan.

c) A avaliación final consistirá nunha proba que deberán realizar por escrito e que suporá o 60% da cualificación final. Esta proba conterá unha parte teórica (a cal suporá o 40% da nota da proba escrita) e outra práctica (60% da nota da proba escrita). E, por suposto, a avaliación final da presente UD virá dada pola parte que a ela se lle dedique no exame final escrito. Esta proba realizarase nas datas previstas polo centro.

Para a superación desta UD (así como das outras que compoñen a materia) recoméndase facer un seguimento continuo dos seus contidos ao longo do curso, participar activamente no desenvolvemento da unidade, resolver e discutir os exercicios prácticos propostos, e acudir ás titorías programadas. Isto quere dicir que, ademais do tempo de traballo presencial na aula, o alumnado deberá dedicar un tempo de traballo persoal —que inclúe o estudo autónomo (individual ou en grupo)— á análise de casos e á preparación de presentacións e exposicións na aula.

BIBLIOGRAFÍA

- BIRCHLER, U. E M. BÜTLER (2007), *Information Economics*, Londres: Routledge.
- HIRSHLEIFER, J. E J. RILEY (1992), *The Analytics of Uncertainty and Information*, Cambridge, Mass.: Cambridge University Press.
- MACHO-STADLER, I. E D. PÉREZ-CASTRILLO (1994), *Introducción a la economía de la información*, Barcelona: Ariel.
- SHAPIRO, C. E H. VARIAN, H. (2000), *El dominio de la información: una guía estratégica para la economía de la Red*, Barcelona: Antoni Bosch.
- USATEGUI, J.M. (2002), *Economía de la información*, Bilbao: Universidad del País Vasco.
- USATEGUI, J.M. (2011), Valor de la información. Cantidad óptima de información. Valor de la flexibilidad, Documento de traballo Sarriko-On 01/11, Bilbao: Universidad del País Vasco.



Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA