Economía y matemáticas: un tour con guía (por algunas avenidas)

Manel Antelo*

Resumen

Esta comunicación es una versión reducida de la conferencia que, bajo el mismo título, tuve el placer de impartir en la Facultad de Matemáticas de la USC durante el curso 2004-05 dentro del ciclo *Unha Andaina pola Matemática*. La comunicación tiene por objeto ejemplificar cómo la ciencia económica utiliza las matemáticas, dando a conocer algunas de las principales herramientas y técnicas matemáticas para el análisis formal de determinados modelos de comportamiento económico. A lo largo del documento se hace hincapié en la discusión, a nivel introductorio, de los modelos matemático-económicos construidos en un área central de la teoría económica como es la teoría del equilibrio general competitivo. El propósito último del documento es doble: ayudar a delimitar la importancia del binomio economía-matemáticas en el campo de la investigación económica y motivar el papel central que las matemáticas juegan en la teorización de los fenómenos económico-sociales de cara a la obtención de leyes y teorías.

Palabras clave: Economía, matemáticas, teoría del equilibrio general competitivo

Clasificación JEL: A23

1. Introducción

El objetivo de esta introducción es hacer tres advertencias informativas con la esperanza de que ayuden al lector a valorar, de entrada, la importancia de los temas que a continuación se desarrollarán. La primera de las advertencias es el intento de justificar la idoneidad del añadido entre paréntesis al título de este documento. El porqué de este añadido radica en el hecho de que las opciones para realizar una visita—guiada o no—son siempre múltiples, lo cual requiere, en consecuencia, y siempre que los recursos disponibles sean limitados, optar

---

*Departamento de Fundamentos da Análise Económica, Universidade de Santiago de Compostela, Campus Norte, 15704 Santiago de Compostela, Spain (E-mail: aepantel@usc.es). Doy las gracias a Mikel Pérez-Nievas por sus comentarios y sugerencias. Por supuesto, cualquier error es de mi exclusiva responsabilidad.

de forma inexorable por una opción concreta en perjuicio de otras alternativas posibles. Esta aseveración que, con rasgos de lógica común, es válida en cualquier instancia en general, resulta más evidente aún en el caso que nos ocupa. En efecto, dado que estamos hablando de economía, se hace más patente, si cabe, la obligación de empezar dando ejemplo: de recorrer alguna o algunas avenidas del binomio matemáticas-economía en detrimento de otras. No en vano, esta decisión—la de realizar elecciones de la mejor manera posible optando por unas alternativas y desechando otras—constituye la esencia misma del problema económico y del comportamiento de los diversos agentes involucrados en dicho problema. En definitiva, en el tratamiento de la relación matemáticas-economía restringiremos la atención a una de las áreas de mayor relevancia para la ciencia económica y en la que la colaboración de las matemáticas ha sido notablemente fructífera: el desarrollo matemático de la teoría del equilibrio general competitivo (TEGC). Esperemos que con la adopción de esta decisión y la consiguiente renuncia a otras alternativas consigamos maximizar la utilidad del lector.

La segunda advertencia de interés parte del hecho de que las matemáticas han sido desde siempre un instrumento fundamental para el avance de numerosas disciplinas científicas, a la vez que las necesidades de éstas últimas han contribuido, en muchas ocasiones, a poner en marcha nuevas técnicas y desarrollos matemáticos.[1] En el asunto que nos ocupa, si bien es verdad que la formulación y el análisis de los modelos económicos en clave matemática es un proceso más reciente que el de las ciencias de la naturaleza, no es menos cierto que ha experimentado un crecimiento espectacular en su hasta ahora corta vida. Buena prueba de ello es que en el periodo que media entre los años 1933 y 1988 el número de publicaciones técnicas en las cinco revistas más genuinas del enfoque matemático de la economía[2] se multiplicó nada menos que por diez (ver Debreu, 1994).[3] La consecuencia de esta evolución es que, en los últimos años, la economía ha estabilizado su posición como ciencia, en una parte sustancial gracias al empleo de técnicas matemáticas y estadísticas cada vez más sofisticadas y de mayor potencial analítico, al tiempo que el avance de la ciencia económica también ha conseguido influir—de forma análoga a lo sucedido en otras ciencias—en el desarrollo de nuevos programas de investigación en matemáticas, en el sentido de que ciertas necesidades económico-sociales han sido clave para que determinadas innovaciones y desarrollos matemáticos tuviesen lugar. Sin ánimo de ser exhaustivos, áreas como la teoría de juegos, la teoría de la optimización incluyendo significativos desarrollos en el análisis convexo, el cálculo de variaciones, la programación dinámica y estocástica o el análisis no diferenciable son, entre otras muchas, innovaciones matemáticas surgidas en gran parte de la necesidad de explicar problemas de índole económica y de haberlo hecho mediante la formalización y resolución matemática de los correspondientes modelos y teorías propuestos para encarar dichos problemas.

[1] Es paradigmático, por ejemplo, el papel que jugó la física en el s. XVIII de cara al desarrollo del cálculo diferencial.

[2] Es decir, Econometrica, International Economic Review, Journal of Economic Theory, Journal of Mathematical Economics y Review of Economic Studies.

[3] Citado en Pulido (2002).

La tercera insinuación que cabe mencionar es consecuencia directa de la anterior. En la actualidad, la extensión del instrumental matemático utilizado por la ciencia económica, así como la profundidad y el rigor con el que éste es aplicado, está situada en un peldaño no mucho más abajo que el escalón que ocupa la utilización que de las técnicas y desarrollos matemáticos hacen las ciencias físicas. Cotéjense artículos de investigación en revistas de economía especializadas con artículos de otras disciplinas científicas y se tendrá la constatación de lo afirmado.

El resto de esta comunicación, que utilizaré para sobrevolar algunos aspectos relevantes del maridaje economía-matemáticas, enfatizando cómo las matemáticas han ayudado—y lo siguen haciendo—al desarrollo y el avance de la ciencia económica y cómo, al mismo tiempo, determinadas necesidades de la teorización de la ciencia económica han contribuido al desarrollo de nuevas herramientas y resultados matemáticos, está organizado de la siguiente forma. La Sección 2 se dedica a revisar de forma breve la evolución histórica de la economía matemática (EM). En la Sección 3 se analiza un caso especial de maridaje entre las matemáticas y la economía, como es el desarrollo matemático de la TEGC. La Sección 4 concluye.

2. Breve alusión al desarrollo histórico de la EM

Atendiendo al énfasis puesto por la EM en la utilización de un tipo u otro de instrumentos matemáticos, es posible distinguir en el desarrollo de la EM tres grandes periodos claramente diferenciados. El primero de ellos es el que va desde la publicación de la obra *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Théorie des Richesses* del matemático y filósofo francés Antoine-Agustin Cournot en 1838 hasta la aparición del libro de texto de teoría económica más vendido de toda la historia, la obra del economista americano Paul A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, aparecida en 1947. Cournot es considerado el fundador de la EM basada en que las formas superiores del análisis matemático pueden ser fácilmente aplicadas—y deben ser aplicadas—a una serie de proposiciones y teoremas cuyo contenido es la formulación de leyes económicas. La característica más destacable de la investigación en EM a lo largo de este periodo, y especialmente a lo largo de la primera mitad del s. XX, es, sin duda, la creciente utilización del álgebra lineal y el cálculo infinitesimal en los diferentes modelos económicos, si bien el punto de arranque del uso sistemático y continuado de las matemáticas en la ciencia económica hay que situarlo alrededor de 1875 cuando economistas de la talla de Walras, el fundador de la teoría matemática del equilibrio general competitivo junto con Pareto más tarde, Jevons o Edgeworth se interesan por la obra de Cournot y reivindican la importancia y el carácter pionero de la misma.[4]

[4]Conviene mencionar que con anterioridad a que el análisis infinitesimal se convirtiera en un instrumento conceptual y metodológico básico para el desarrollo del análisis económico, determinados autores ya lo habían utilizado de forma esporádica en la resolución de problemas concretos de economía aplicada. Así, el primer libro en el que se aplican técnicas matemáticas

La segunda fase de desarrollo analítico de la EM es la que podemos llamar etapa contemporánea de la EM. Abarca desde 1947 hasta 1960 y a lo largo de la misma el énfasis se sitúa en los juegos y modelos de estrategia. Una causa determinante de este cambio de rumbo con respecto a la etapa precedente fue, sin duda, el apogeo de la Guerra Fría que motivó el diseño y desarrollo de estrategias militares de seguridad nacional y de orden internacional,[5] estrategias de las que las cuestiones y comportamientos económicos están a un solo paso. La obra paradigmática del espíritu de esta fase analítica es *The Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium* de Gerard Debreu, publicada en 1959, y el programa de investigación fundamental de este periodo es la demostración de la consistencia del modelo de equilibrio general competitivo realizada independientemente al principio (a través de la teoría de conjuntos convexos) y en colaboración después por Kenneth Arrow y Gerard Debreu (Debreu, 1952; Arrow y Debreu, 1954) en lo que desde entonces se conoce como modelo de equilibrio walrasiano Arrow-Debreu. No menos importante y representativa de esta época es la fantástica obra *Theory of Games and Economic Behavior* escrita conjuntamente por el matemático y físico Janos von Neuman y el economista Oskar Morgenstern, la cual si bien fue publicada en 1944 tuvo su mayor repercusión a lo largo de esta etapa y las siguientes.[6] La grandeza de esta obra es que, de forma pionera, introduce el modelo de la teoría de los juegos y ayuda a entender el comportamiento estratégico de los agentes económicos en contextos en los que interactúan y, por tanto, en los que el resultado para cada individuo de cada decisión que adopte es fruto no sólo de dicha decisión sino también de lo que el agente en cuestión espera que los otros hagan, un aspecto que hasta entonces era considerado indeterminado por la teoría económica.

---

en el campo de la economía es el que escribió el ingeniero italiano Giovanni Ceva en 1711 al intentar presentar la teoría de la moneda en términos geométricos. Veintisiete años más tarde, en 1738, Daniel Bernouilli vislumbró las posibilidades que el cálculo diferencial abría para desarrollar conceptos asociados a la utilidad de los bienes. En 1761, Cesare Beccaria utilizó el álgebra en un análisis sobre los riesgos y los beneficios del contrabando. En España, José Alonso López determina, en 1820, las cuotas impositivas óptimas y lo hace con un gran rigor analítico utilizando el cálculo infinitesimal (véase Dopico, 2005). No obstante, más allá de estas experiencias aisladas, hay que esperar a 1838 para encontrar el primer intento serio de explorar sistemática y regularmente la utilización de las matemáticas en la ciencia económica a través de la obra de Cournot, una obra que, sin embargo, pasó desapercibida cuando fue publicada, por aparentar demasiado avanzada para su tiempo, y no fue reconocida en su justo valor hasta finales del s. XIX. Recordemos que algo similar también ocurrió con el propio desarrollo del análisis infinitesimal realizado por Newton y Leibniz en la segunda mitad del s. XVII: supuso el nacimiento de una nueva y revolucionaria forma de pensar en la historia de la ciencia (un todo se podía descomponer en infinitas partes indivisibles y a su vez la agregación de dichas partes permitía recomponer el todo), a pesar de lo cual—o tal vez precisamente por esta razón—fue difícilmente entendible al principio por los mismos matemáticos de la época, no erigiéndose en herramienta analítica fundamental hasta bien entrado el s. XVIII, y especialmente hasta después de la publicación, en 1748, de la obra *Introductio in Analysis Infinitorum* de Leonhard Euler (véase Dopico, 2005).

[5] El nacimiento de la teoría de los juegos se produce justamente en un contexto en el que la prioridad del orden internacional allá por 1945 era impedir el estallido de la III Guerra Mundial (véase Fourmont, 2005).

[6] Así por ejemplo Debreu sitúa en 1838 el origen simbólico de la primera fase de la EM y en 1944 el nacimiento de la etapa contemporánea de la EM (véase Debreu, 1983).

Por último, el tercer periodo de teorización de la EM tiene su inicio con la década de 1960 y continúa hasta el momento presente. En él se intenta conciliar la utilización del cálculo infinitesimal con la teoría de conjuntos y los modelos lineales. Más concretamente, es en esta época cuando todos los campos de la ciencia económica (microeconomía, macroeconomía, economía de la información, teoría del comercio internacional, economía industrial, finanzas, economía de la salud...) se impregnan del tratamiento matemático y estadístico para la elaboración de los distintos modelos y teorías que configuran cada una de estas especialidades.

3. Un caso de especial maridaje matemáticas-economía: la TEGC

Donde mejor se observa la utilización regular que de las matemáticas hace la economía es en la TEGC, la cual constituye, por otra parte, el núcleo duro del análisis económico.[7] Esto último se comprende mejor si tenemos en cuenta que los problemas económicos fundamentales (cómo funcionan los diversos mercados en los que existen agentes consumidores y productores con objetivos diferentes y, por ende, cómo estos agentes logran coordinar sus decisiones de consumo y producción por medio del intercambio) encuentran acomodo justamente en el análisis de la TEGC.

Partiendo del hecho de que la conjunción de decisiones de los agentes económicos (productores, consumidores, Estado) tiene lugar en los diversos mercados y que los precios de los bienes que se producen y consumen sirven para descentralizar el funcionamiento de dichos mercados, las dos cuestiones fundamentales a las que debemos dar respuesta son: (a) ¿cómo se forman los precios de los bienes?, i.e. ¿cómo se alcanza una situación de equilibrio?, y (b) ¿es el sistema de precios un mecanismo (de asignación de recursos escasos) que funciona de forma eficiente o no?, i.e. ¿qué propiedades, en términos de bienestar, presenta dicho equilibrio? El modelo de EM que, de la forma más simplificada posible, consigue captar los aspectos esenciales de estas cuestiones sin sumergirnos en complicaciones innecesarias es el llamado modelo de economía de intercambio puro (EIP) compuesto por consumidores y mercancías. Este modelo estiliza una *economía de patio de colegio* en la que no hay producción de bienes (las mercancías son "producidas" por la naturaleza) y, por ende, el interés analítico se vuelca en el estudio de las posibilidades que ofrece el comercio o intercambio voluntario entre los individuos de las cantidades de mercancías que cada uno de ellos posee. De hecho, cuando finalizan los intercambios de bienes entre los distintos individuos (se supone que) todos alcanzan una posición de equilibrio (equilibrio general competitivo o equilibrio walrasiano) en la que las ventajas del comercio libre han sido agotadas y, en consecuencia, ningún agente tiene incentivos a modificar las decisiones que le han conducido a esta situación.

[7] Un tratamiento excelente del desarrollo teórico de los aspectos centrales de la TEGC, así como del análisis de la TEGC desde la óptica de la diferenciabilidad puede encontrarse en Mas-Colell (1985).

Para ser concisos, consideremos una economía distributiva o EIP $I \times J$ configurada por I individuos, $\{1, ..., i, ..., I\}$, y J bienes de consumo, $\{1, ..., j, ..., J\}$. La estructura formal del problema de cada individuo (consumidor) i de esta economía constará de tres fases: ordenar las opciones (planes de consumo) de acuerdo con la intensidad de sus preferencias (preferencias dadas exógenamente), considerar las restricciones (de riqueza) a las que se enfrenta y, finalmente, escoger la mejor alternativa de consumo de entre las factibles. A la hora de modelar las preferencias de un determinado individuo, suponemos que éste consume cestas (vectores) de bienes de la forma $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_J) \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^J_+$, donde $\mathbf{X}$ es el llamado conjunto de planes de consumo del individuo,[8] con $q_j \geq 0$, a la vez que $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$. Las preferencias se resumen en una relación binaria de preferencia, $\succsim$, sobre el conjunto de mercancías $\mathbf{X}$, relación binaria que no es más que un subconjunto del producto cartesiano $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ ($\succsim \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$). Dicha relación binaria se define como:

$$\forall \mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbf{X}, \mathbf{q} \succsim \mathbf{q}' = \{\mathbf{q} \text{ al menos tan preferido como } \mathbf{q}'\} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}. \tag{1}$$

A la relación (binaria) de preferencia débil dada en (1) se le exige una serie de propiedades (axiomas) para conseguir dos objetivos analíticos básicos: ser capaces de representar $\succsim$ de forma numérica y, derivado de lo anterior, poder plantear el problema de elección del consumidor "como si" fuese un problema de optimización matemática condicionada. Una parte de la lista de "axiomas deseables" de los que estamos hablado está relacionada con meras propiedades de $\mathbb{R}$. Son los cuatro que se detallan a continuación:

$$\forall \mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbf{X}, \mathbf{q} \succsim \mathbf{q}' \text{ o } \mathbf{q}' \succsim \mathbf{q} \text{ o ambas,} \tag{Completitud}$$

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}, \mathbf{q} \succsim \mathbf{q}, \tag{Reflexividad}$$

$$\forall \mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'' \in \mathbf{X}, \text{ si } \mathbf{q} \succsim \mathbf{q}' \text{ y } \mathbf{q}' \succsim \mathbf{q}'', \text{ entonces } \mathbf{q} \succsim \mathbf{q}'' \tag{Transitividad}$$

y

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}, \text{ el conjunto } \textit{preferido} \text{ a } \mathbf{q}, \succsim \mathbf{q}, \text{ y el conjunto} \\ &\quad \textit{despreferido} \text{ a } \mathbf{q}, \precsim \mathbf{q}, \text{ son conjuntos cerrados y conexos.} \end{aligned} \tag{Continuidad}$$

La presencia de estas propiedades, de convincente lógica, en la relación de preferencias $\succsim$ habilita dicha relación para poder ser representable numéricamente a través de una función de utilidad, i.e. una función del tipo

$$u : \mathbf{q} \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^J_+ \rightarrow u(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \mathbf{q} \succsim \mathbf{q}' \Leftrightarrow u(\mathbf{q}) \geq u(\mathbf{q}') \tag{2}$$

y cuyo contenido es meramente ordinal. Formalmente, establecemos la siguiente proposición:

[8] Aunque más adelante introduciremos superíndices para referirnos a los individuos, no es todavía el momento de hacerlo porque ello recargaría innecesariamente la notación.

Proposición 1 *Si la relación de preferencias $\succsim$ es completa, reflexiva y transitiva (i.e. si es racional) y además es continua, entonces existe una función como la definida en* (2) *continua que la representa.*

El resultado anterior apunta a que tal vez pueda haber—y de hecho hay—preferencias no susceptibles de ser representadas numéricamente. El ejemplo clásico más socorrido es el de las preferencias lexicográficas, $\succsim^L$, definidas como

$$\mathbf{q} \succsim^L \mathbf{q}' \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 > q_1' \\ q_1 = q_1', \text{ entonces } q_2 > q_2' \\ q_1 = q_1' \text{ y } q_2 = q_2', \text{ entonces } q_3 > q_3' \\ \quad\quad ... \\ q_1 = q_1', \, ..., \, q_{J-1} = q_{J-1}', \text{ entonces } q_J > q_J' \end{cases}$$

las cuales, por ser discontinuas, no tienen representación numérica posible.[9]

Adicionalmente, si queremos formalizar la idea del *consumismo* de los individuos ("más es mejor que menos"), así como el hecho empírico de que la *diversidad* en el consumo (la gente suele preferir combinaciones de consumo "intermedias" a combinaciones "extremas"), hemos de proponer para la relación de preferencias $\succsim$ las dos siguientes propiedades:

$$\forall \mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbf{X}, \text{ si } \mathbf{q} \geq \mathbf{q}', \mathbf{q} \neq \mathbf{q}', \text{entonces } \mathbf{q} \succ \mathbf{q}' \qquad \text{(Monotonia)}$$

y

$$\forall \mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbf{X} \text{ tales que } \mathbf{q} \succsim \mathbf{q}', \; \alpha\mathbf{q} + (1-\alpha)\mathbf{q}' \succ \mathbf{q}', \; \alpha \in (0,1) \qquad \text{(Convexidad (estricta))}$$

En resumen, el hecho de que los consumidores de nuestra EIP tengan unas preferencias que satisfacen las propiedades anteriores nos permite interpretar a cada uno de ellos como tripletas $\left(\succsim^i, \mathbf{X}^i, \mathbf{w}^i\right)^{i \in I}$, donde $\mathbf{w}^i = (w_1^i, ..., w_J^i)$ es la dotación inicial de recursos del individuo i o, alternativamente, como tripletas $\left(u^i(\mathbf{q}^i), \mathbf{X}^i, \mathbf{w}^i\right)^{i \in I}$, donde $u^i(\mathbf{q}^i)$ es la función de utilidad de i, la cual es de clase C^2, creciente y cuasicóncava, y donde $\mathbf{q}^i = (q_1^i, ..., q_J^i)$ denota la combinación de consumo del individuo i. Una EIP idealizada $I \times J$ como la que estamos formalizando se describe, pues, por un vector del tipo

$$e = \left[\mathbb{R}_+^J, \left(\succsim^i, \mathbf{X}^i, \mathbf{w}^i\right)^{i \in I}\right] \text{ o bien } e = \left[\mathbb{R}_+^J, \left(u^i(\mathbf{q}^i), \mathbf{X}^i, \mathbf{w}^i\right)^{i \in I}\right]. \qquad (3)$$

Casos particulares de funciones de utilidad utilizadas con profusión en el análisis económico son los dados por:

$$u(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j q_j, \, \alpha_j > 0, \, j = 1, ..., J,$$

[9] A pesar de lo cual el problema sigue teniendo obviamente solución; ahora bien, al no existir función (objetivo) de utilidad en dicho problema, la solución no se puede obtener claro está como resultado de un programa de optimización condicionado.

la cual representa gustos por bienes sustitutivos como por ejemplo los bolígrafos azules, negros, rojos, verdes,... (en los cuales lo que importa es que escriban),

$$u(\mathbf{q}) = \text{mín}\left\{\alpha_1 q_1, ..., \alpha_J q_J\right\}, \; \alpha_j > 0, \; j = 1, ..., J,$$

que representa preferencias por bienes complementarios como el bañador, el protector solar, las chanclas, las gafas de sol, la toalla,... (todos ellos de consumo conjunto para satisfacer la necesidad de sol y playa),

$$u(\mathbf{q}) = \prod_{j=1}^{J} \alpha_j q_j^{\beta_j}, \; \alpha_j, \beta_j > 0, \; j = 1, ..., J,$$

indicativa de las llamadas preferencias Cobb-Douglas,

$$u(\mathbf{q}) = f(q_1) + g(\mathbf{z}), \text{ siendo } \mathbf{z} = (q_2, ..., q_J), \; f'' \neq 0, g'' = 0$$

a través de la cual se representan preferencias cuasi-lineales,

$$u(\mathbf{q}) = \left(\sum\nolimits_{j=1}^{J} q_j^{\alpha}\right)^{1/\alpha}, \; \alpha \in (0, 1]$$

que denota preferencias de elasticidad de sustitución constante (CES), etc.

El segundo paso analítico en el planteamiento formal del problema de cada agente económico i de la EIP que estamos estudiando pasa por considerar las restricciones a las que dicho agente se enfrenta. Tales restricciones vienen definidas por la riqueza del individuo (i.e. por el valor de su dotación inicial), $\sum\nolimits_{j=1}^{J} p_j w_j^i$, donde p_j es el precio de mercado del bien j, y por la no-negatividad de la cantidad de todos y cada uno de los bienes a consumir, $\mathbf{q}^i \geq \mathbf{0}$,[10] las cuales determinan un conjunto (presupuestario) compacto. Por último, escoger la mejor alternativa de los planes de consumo factibles equivale a que cada individuo i actúe "como si" resolviese el siguiente problema (problema primal o problema MU):

$$\max_{\{\mathbf{q}^i\}} \; u^i(\mathbf{q}^i), \text{ s.a: } \begin{cases} \sum\nolimits_{j=1}^{J} p_j q_j^i - \sum\nolimits_{j=1}^{J} p_j w_j^i \leq 0 \\ \mathbf{q}^i \geq \mathbf{0}, \end{cases} \tag{4}$$

para todo $i = 1, ..., I$. Y dado que el problema de programación no lineal definido en (4) satisface las condiciones del teorema de Weierstrass de existencia de máximo local, queda garantizado que tiene solución. Dicha solución adopta la forma

$$q_j^{i*} = q_j^{im}(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}^i), \; i = 1, ..., I; \; j = 1, ..., J, \tag{5}$$

y donde $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_J) \geq \mathbf{0}$ es el vector de precios. A esta solución se la conoce como conjunto de funciones de demanda marshalliana del individuo i para cada uno de los bienes.[11]

[10] Estamos, por tanto, en el ortante no negativo de $\mathbb{R}^J$.

[11] Si las preferencias de los agentes fuesen (débilmente) convexas, habría que hablar de correspondencias de demanda marshalliana.

Una vez definidas, a partir de (5), las funciones de exceso de demanda o demanda neta de cada uno de los individuos,

$$z_j^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}^i) = q_j^{\mathrm{im}}(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}^i) - w_j^i, \tag{6}$$

es inmediato ver que cada individuo se convierte en comprador (resp., vendedor) si el valor de (6) es positivo (resp., negativo). A partir de aquí, y teniendo en cuenta que las funciones de exceso de demanda agregada en cada mercado j se definen como

$$z_j(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}^i) = \sum\nolimits_{i=1}^{I} \left[q_j^{\mathrm{im}}(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}^i) - w_j^i\right] \tag{7}$$

tenemos todos los ingredientes necesarios para definir el equilibrio general competitivo o equilibrio walrasiano de la EIP que estamos teorizando:

Definición 1 *Un equilibrio walrasiano de la EIP e descrita en* (3) *es el sistema de precios* $\mathbf{p}^* = (p_1^*, ..., p_J^*)$ *y la asignación de recursos* $\mathbf{q}^* = (\mathbf{q}^{1*}, ..., \mathbf{q}^{I*})$*, tales que:*

(a) para todo $i = 1, ..., I$, $\mathbf{q}^{i*}$ *es una asignación factible,*

(b) para todo $i = 1, ..., I$, $\mathbf{q}^{i*}$ *resuelve el problema* (4) *para* $\left(\mathbf{p}^*, \mathbf{w}^i\right)$*,*

(c) para todo $j = 1, ..., J$, $\sum\nolimits_{i=1}^{I} q_j^{im}(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}^i) - \sum\nolimits_{i=1}^{I} w_j^i \leq 0.$

Esto es, afirmamos que un vector de precios $\mathbf{p}^*$ es de equilibrio cuando consigue vaciar todos los mercados de la economía de forma simultánea o, equivalentemente, decimos que una economía de mercado está en equilibrio walrasiano cuando no existe exceso de demanda (positivo) en ninguno de los mercados que la componen. Formalmente, cuando $z_j(\mathbf{p}^*) \leq 0$, para todo $j = 1, ..., J$, pudiendo ser $z_j(\mathbf{p}^*) < 0$ si el bien j es un bien gratuito, i.e. un bien para el que $p_j = 0$.[12]

Para la demostración formal de la existencia de equilibrio walrasiano en una EIP como la nuestra en la que no existe dinero (y, por tanto, en la que la única información pertinente es la proporcionada por los precios relativos de los bienes y no por los valores absolutos de dichos precios), podemos escoger una representación simplificada del espacio de precios que nos resulte conveniente. La representación más útil es la que consiste en establecer una normalización de los precios, normalización que se puede realizar de dos maneras alternativas.[13] Una forma es la que consiste en tomar arbitrariamente un bien—supongamos, sin pérdida de generalidad, que se trata del bien j—y fijar su precio en $p_j = 1$;

[12] Véase Antelo (2000).

[13] Hagamos un poco de historia. En los comienzos del desarrollo de la TEGC se creía que si el número de ecuaciones del sistema coincidía con el de incógnitas, existía solución (equilibrio) automáticamente. Sin embargo, pronto se comprobó que esta condición es suficiente sólo en el caso de que las ecuaciones sean lineales e independientes. Cuando no son lineales (como suele ocurrir en la práctica) y, además, existen restricciones adicionales en el sistema de ecuaciones (como, por ejemplo, la no-negatividad de las cantidades de bienes), el método de contabilizar el número de ecuaciones y el de incógnitas y verificar que coinciden no garantiza que exista solución. Esta indeterminación fue la que provocó que en la década de 1950 se pasase a utilizar la topología (el enfoque del teorema de punto fijo) como una de las piedras angulares para probar la existencia de equilibrio walrasiano. Y para utilizar el teorema de punto fijo es para lo que necesitamos introducir la normalización a la que nos estamos refiriendo.

con ello, el intercambio en esta "nueva" economía normalizada se realiza en términos de este bien cuyo precio está normalizado a 1 (bien numerario). Otra normalización posible de los precios es la que consiste en fijar igual a 1 no el precio de uno de los bienes en particular, sino la suma de los precios de todas las mercancías de la economía, $\sum_{j=1}^{J} p_j = 1$. En este caso, el precio de cada bien aparece normalizado o relativizado con respecto a la suma de los precios y el espacio en el que se representan los "nuevos" precios de los bienes (precios normalizados) no es más que el simplex unitario, el cual está definido en el espacio de dimensión $J-1$ correspondiente a los $J-1$ precios linealmente independientes. Si adoptamos esta segunda normalización, entonces en lugar de expresar las funciones de exceso de demanda agregada (7) en términos de los precios absolutos, se pueden expresan en términos de los precios normalizados en el símplex unitario $(J-1)$-dimensional definido como el conjunto (de precios)

$$\mathbf{S}^{J-1} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+}^{J} \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \text{ y } \sum_{j=1}^{J} p_j = 1 \right\} \subset \mathbb{R}_{+}^{J}. \tag{8}$$

Geométricamente, el simplex unitario (8) es un triángulo generalizado en el espacio $(J-1)$-dimensional y, como conjunto que es, tiene la útil propiedad de ser el conjunto convexo más sencillo posible. A partir de él, definimos la función de exceso de demanda agregada $\mathbf{z}(\mathbf{p}) : \mathbf{S}^{J-1} \to \mathbf{S}^{J-1}$

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{q}^{i*}(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}^i) - \sum_{i=1}^{J} \mathbf{w}^i \tag{9}$$

$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = (z_1(\mathbf{p}), ..., z_J(\mathbf{p}))$, y formalizamos el proceso de ajuste de precios en el simplex (i.e. formalizamos el proceso de *tâtonnement*) a través de la función $\mathbf{g}(\mathbf{p})$: $\mathbf{S}^{J-1} \to \mathbf{S}^{J-1}$, siendo $\mathbf{g}(\mathbf{p}) = (g_1(\mathbf{p}), ..., g_J(\mathbf{p}))$, y cuyos componentes son del tipo

$$g_j(\mathbf{p}) = \frac{\text{máx}\{0, p_j + z_j(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{j=1}^{J} \text{máx}\{0, z_j(\mathbf{p})\}}, \; j = 1, ..., J, \tag{10}$$

i.e. la función (10) representa el proceso de ajuste de precios en el mercado del bien j. Dado que la función definida en (10) cumple todos los requisitos exigidos por el teorema de Brouwer (Brouwer, 1910), queda garantizado que existe $\mathbf{p}^*$ tal que $\mathbf{p}^* = \mathbf{g}(\mathbf{p}^*)$ y, además, dicho $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio walrasiano. Formalmente, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2 *Si la función de exceso de demanda agregada* (9) *es continua*[14] *y satisface* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{0}$ *(ley de Walras), existe al menos un vector de precios* $\mathbf{p}^*$ *en* $\mathbf{S}^{J-1}$ *tal que* $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$.

[14] Exigir que la función de exceso de demanda agregada sea una función continua significa que una pequeña variación de los precios sólo provoca una pequeña variación de la demanda agregada. ¿Cuándo es continua la función de exceso de demanda agregada? Lo es cuando la función de demanda de cada individuo es continua (cosa que sucede si las preferencias del individuo son convexas) o, si la demanda de cada consumidor no es una función continua, cuando cada uno de los consumidores es pequeño con relación al tamaño total del mercado.

La demostración de este teorema (ver Mas-Colell *et al.*, 1995) permite vislumbrar de forma nítida la interacción existente entre los aspectos económicos y matemáticos que confluyen en la teoría del equilibrio walrasiano. En particular, si la economía presenta continuidad y verifica la ley de Walras, el teorema de punto fijo garantiza la existencia de equilibrio walrasiano.

Una vez determinada la existencia del equilibrio (lo cual sólo requiere de la continuidad de las funciones de demanda marshalliana para poder utilizar un teorema de punto fijo), la segunda cuestión relevante es determinar cómo de bueno es el EGC obtenido (la asignación correspondiente al EGC). La respuesta a esta pregunta se concreta en dos conocidos teoremas de la economía del bienestar, en los cuales, a su vez, se utilizan herramientas matemáticas básicas. El primero de los teoremas mencionados afirma que las asignaciones de todos los equilibrios de mercado (estados de la economía) son eficientes en el sentido de Pareto, resultado que nos permite concluir que el sistema de precios es un buen mecanismo para asignar los recursos económicos en el sentido de que obtiene todas las ganancias del comercio. El segundo teorema del bienestar indica que toda asignación eficiente en el sentido de Pareto es un equilibrio para algún conjunto de precios, lo cual da pie a que el planificador pueda—y deba—hacer cosas (básicamente, redistribuir las dotaciones iniciales de los individuos) para que luego el mecanismo de mercado sea capaz de "producir" el estado de la economía deseado. Más allá de los mensajes positivos y normativos implícitos en estos teoremas, lo importante para nuestros propósitos es que la prueba de la optimalidad del equilibrio walrasiano se basa en el análisis convexo, por lo que no necesita de supuestos de diferenciabilidad. En particular, para la demostración del segundo teorema se utiliza el teorema del hiperplano separador (una propiedad de los conjuntos convexos) y las propiedades topológicas de las preferencias.

Una vez revisados los procedimientos que nos indican cómo averiguar que existe al menos *un* conjunto de precios de equilibrio y cuál es la optimalidad del mismo, a las cuestiones de unicidad y estabilidad estática y dinámica del equilibrio también se les ha dedicado una especial atención analítica.[15] A los efectos presentes, importa mencionar que los aspectos de unicidad y estabilidad del equilibrio son los que en su momento permiten reabrir la puerta al análisis diferenciable. Así, para garantizar la unicidad del equilibrio se utiliza el teorema de Gale-Nikaido (1965) sobre funciones y aplicaciones biunívocas o el comportamiento de la matriz Jacobiana de los excesos de oferta agregada (que sea una P-matriz, una matriz de diagonal negativa dominante, etc.) según que hablemos de condiciones necesarias o suficientes de unicidad. Y el problema de la unicidad alcanza su punto culminante en la década de 1960 cuando Gerard Debreu introduce la topología diferencial. Por otra parte, el análisis de la estabilidad

[15] Los avances más significativos en la teorización del modelo de EGC pueden ser encuadrados, en general, en dos tipos de literatura: por una parte, la literatura de raíz alemana que le dedicó particular atención a la existencia y unicidad del equilibrio walrasiano y, por otra, la anglo-norteamericana, la cual se preocupó especialmente por la estabilidad y estática comparativa del equilibrio.

dinámica del equilibrio[16] supuso la introducción de las ecuaciones en diferencias (en el caso del análisis en términos discretos) y las ecuaciones diferenciales (cuando el modelo se dinamiza en términos continuos). En este último caso, y a título de ejemplo, el sistema de ecuaciones diferenciales tiene la forma

$$\dot{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = f(z_2(\mathbf{p}), ..., z_J(\mathbf{p})), \tag{11}$$

siendo f cualquier función de velocidad de ajuste que conserve el signo de los excesos de demanda $\mathbf{z}(\mathbf{p})$, con lo cual podemos establecer la siguiente definición:

Definición 2 *El equilibrio walrasiano* $\mathbf{p}^*$ *es dinámicamente estable sii* $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^*$*, para todo* $t > 0$*, i.e. sii* $\dot{\mathbf{p}}^* = f(z_2(\mathbf{p}), ..., z_J(\mathbf{p})) = f(\mathbf{p}^*) = 0$.

A partir de aquí, los métodos de Liapunov son de amplia utilización como herramientas para determinar si un determinado vector de precios de equilibrio walrasiano es dinámicamente estable o no (véase Gandolfo, 1971).

3.1. ¿Hay vida en la EM más allá del uso del cálculo?

Después del impulso analítico del modelo de EGC basado en la utilización masiva del cálculo diferencial, el estudio de la EM se extendió al análisis de actividades y de los conjuntos de producción eficientes (iniciado por el economista estadounidense de origen holandés Tjalling C. Koopmans) y su desarrollo dentro de la programación lineal como una técnica de descripción formal de la producción como un conjunto de coeficientes de variables de entrada y salida (Robert Dorfman, Paul Samuelson y Robert Solow fueron quienes, entre otros, hicieron las contribuciones seminales en estas líneas de investigación). El análisis de la EM también se amplió al diseño de mecanismos que permiten la interacción de individuos que tienen un impacto no negligible sobre los resultados de esta interacción, i.e. al diseño de procedimientos de decisión social en situaciones en la cuales los agentes económicos guardan información privada y la utilizan de forma estratégica (aportaciones fundamentales en este campo las hicieron Jacob Marshack y Leonid Hurwicz, entre otros). Asimismo, al estudio de los modelos de generaciones solapadas (Maurice Allais, Paul Samuelson), al equilibrio general dinámico y estocástico (lo cual condujo a la utilización de espacios vectoriales de dimensión infinita, técnicas de análisis real y funcional, topología, programación dinámica, teoría del control óptimo determinista y estocástico, teoría de la probabilidad, etc.), a la teoría de los incentivos, a la teoría de la elección social, etc. Con esta lista de avances analíticos (véase Arrow e Intriligator, 1981-84, para una enumeración más detallada) huelga decir que en los

[16] Si bien es cierto que el modelo de EGC estudiado es estático, es posible imaginar una secuencia de periodos ficticios de ajuste de los precios en cada uno de los mercados que nos ayude a entender cómo dichos mercados alcanzan el equilibrio y cómo las fuerzas que operan sobre la situación de equilibrio consiguen restaurar (o no) la economía al equilibrio después de sufrir ésta una perturbación que la lleva a que el vector de precios vigentes $\mathbf{p}(t)$ no coincida con el de precios de equilibrio $\mathbf{p}^*$.

últimos cincuenta años el horizonte matemático de la economía se ha ampliado espectacularmente hasta el punto de que, en la actualidad, ninguna de las disciplinas que integran la ciencia económica escapa a la utilización generalizada y sistemática del instrumental matemático como método y técnica de análisis.

En segundo lugar, y paralelamente al proceso anterior, se ha abandonado progresivamente el énfasis en el cálculo diferencial (por ser una metodología miope y estática en tanto que indicadora de puntos de óptimo de sistemas que básicamente tienen carácter dinámico y por requerir, además, que las funciones de utilidad y de producción sean continuamente diferenciables, cosa que no siempre es fácilmente justificable desde el punto de vista económico) y se ha pasado a utilizar una matemática más fundamental, con las miras puestas en probar la validez de teoremas y leyes con la mayor generalidad posible bajo supuestos y requisitos cada vez menos restrictivos.

Si a estas alturas el lector está preguntándose si hay otras colaboraciones significativas entre las matemáticas y la TEGC aparte de la analizada en este documento, procede mencionar que otro de los importantes préstamos recibidos por el desarrollo de la teoría del equilibrio de la economía fue el concedido por la teoría de juegos. El estímulo principal de la teoría de juegos a la TEGC ha provenido de las herramientas matemáticas desarrolladas en aquélla y aplicadas en ésta, a veces incluso con interpretaciones ligera o totalmente diferentes de las utilizadas en la propia teoría de juegos. Por ejemplo, la teoría de juegos ha desarrollado toda una panoplia de conceptos de equilibrio muy generales que, en principio, estaban destinados a reemplazar la noción del equilibrio competitivo y/o a incluirla como un caso particular de la gama de equilibrios propuestos,[17] pero luego su utilización en la economía acabó estando "matizada", aunque no por ello los resultados han sido menos trascendentales. Antes al contrario, esa "interpretación" ha motivado que la colaboración haya sido y siga siendo de lo más fructífera. El modelo de crecimiento económico equilibrado (von Neuman, 1937, 1945) es uno de los muchos ejemplos de esta relación paradójica entre la teoría de juegos y la teoría económica e ilustra de manera nítida los enormes beneficios aportados por la teoría de juegos al desarrollo de la ciencia económica.

4. Conclusión

Esta comunicación ha pretendido ayudar al lector a delimitar el papel del binomio economía-matemáticas en el campo de la investigación económica y motivar la importancia que las matemáticas tienen en el análisis teórico y aplicado de los fenómenos económicos y sociales. En el intento de cumplir este doble objetivo, hemos hecho hincapié en la teoría del equilibrio general competitivo por dos razones esenciales: porque constituye el núcleo analítico de la teoría económica con el que consigue explicar la estructura de la interacción entre los diversos agentes económicos y porque es uno de los campos donde mejor se ejemplifica

[17] Así, el concepto de equilibrio dado por el *núcleo* (noción propuesta por Gillies, 1953) es idéntico a la curva de contrato de Edgeworth o conjunto de asignaciones eficientes en el sentido de Pareto.

lo fructífero que ha sido—y sigue siendo—la utilización de las matemáticas en la economía. Con todo, y cómo cabría esperar, no es el único reducto en el que la interacción matemáticas-economía es mayúscula y relevante. Otro elemento que ilustra sobremanera la valiosa utilidad de las matemáticas en el análisis económico es la adopción de la teoría de juegos como modelo dominante en teoría económica a lo largo de los últimos treinta años debido a los fructíferos y esclarecedores resultados que ello ha permitido obtener, así como su cada vez mayor participación como modelo de referencia en disciplinas tan variadas como la ciencia política, el derecho, los estudios de seguridad nacional, la sociología, etc. Aunque la discusión del binomio teoría de juegos-economía no ha formado parte de los objetivos de la presente comunicación y daría lugar por sí sola a un recorrido de características similares al realizado en este documento, su mención es pertinente porque añade un elemento más a la hora de ejemplificar lo difícil que es concebir el análisis riguroso de los fenómenos económicos sin modelos matemáticos.

Referencias

- Antelo, M. (2000), *Tópicos en Teoría Microeconómica,* Santiago de Compostela: Tórculo Ed.
- Antelo, M. (2003), *Ejercicios de Microeconomía Avanzada,* A Coruña: Netbiblo.
- Arrow, K.J. y G. Debreu (1954), Existence of an equilibrium for a competitive economy, *Econometrica* 22, 265-290.
- Arrow, K.J. y M. Intriligator (1981-84), *Handbook of Mathematical Economics*, Vols. I, II y III, Amsterdam: North-Holland.
- Brouwer, L.E.J. (1910), Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen* 71, 97-115.
- Cournot, A.A. (1838), Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses, Paris: L. Hachette.
- Debreu, G. (1952), A social equilibrium existence theorem, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 38, 886-893.
- Debreu, G. (1959), *Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, New York: Wiley.
- Debreu, G. (1983), Economic theory in the mathematical mode, Nobel Memorial Lecture, University of California, Berkeley.
- Debreu, G. (1994), Mathematical economics, en *The New Palgrave. A Dictionary of Economics,* Londres: McMillan Press, pp. 399-403.

- Dopico, F. (2005), Matemáticas, fiscalidad y crítica de la escuela clásica. El pensamiento liberal de José Alonso López, Universidade de Santiago de Compostela, mimeo.

- Fourmont, G. (2005), Hacer la paz a golpe de matemáticas, *El País* 30 de Octubre.

- Gale, D. y H. Nikaido (1965), The Jacobian matrix and the global univalence of mappings, *Mathematische Annalen* 159, 81-93.

- Gandolfo, G. (1971), *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*, Amsterdam: North-Holland.

- Gillies, D.B. (1953), Some Theorems on N-Person Games, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Princeton University.

- Mas-Colell, A. (1985), *The theory of General Economic Equilibrium. A Differentiable Approach*, Cambridge: Cambridge University Press.

- Mas-Collel, A., M.D. Whinston y J.P. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford: Oxford University Press.

- Pulido, A. (2002), Posibilidades y limitaciones de las matemáticas en la economía, *Cuadernos del FIIRS* 1.

- Samuelson, P.A. (1947), *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge: Harvard University Press.

- von Neuman, J. (1937), A model of general economic equilibrium, en K. Menger (ed.), *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 1935-36. (Traducido y republicado en *Review of Economic Studies*, 1945).

- von Neuman, J. y O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press.