CAPÍTULO 3
TEORÍA DE LA MEDICIÓN DEL BIENESTAR EN CONDICIONES DE EQUILIBRIO PARCIAL

Resumen

Es conocido que cualquier acción de política pública que se adopte necesita utilizar alguna medición cuantitativa del bienestar de los agentes económicos involucrados para evaluar los efectos que dicha acción pueda tener en dichos agentes. Ello significa que la medición monetaria del bienestar no sólo tiene importancia desde el punto de vista teórico, sino también desde una perspectiva práctica. Precisamente, lo que se hace en los ejercicios numéricos que se proponen y resuelven en este capítulo, es ilustrar de qué manera la teoría microeconómica mide el bienestar de los agentes económicos en un contexto de equilibrio parcial y de certidumbre. Se realizan aplicaciones tanto para los consumidores de bienes y servicios como para los productores de los mismos. Por lo que respecta a los consumidores, se determina la variación de bienestar (en términos monetarios) que experimentan cuando varían los precios de los bienes y/o su nivel de renta, y también se calcula esta medición mediante los llamados números índice. Finalmente, se ilustra cómo medir cuantitativamente el bienestar de los agentes productores.

Ejercicio 3.1

Un determinado individuo que gasta toda la renta que gana, m, en la compra de los bienes 1 y 2, tiene un orden de preferencias expresado por la función de utilidad $u(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{\beta}$, siendo los parámetros α y β estrictamente positivos y tales que $\alpha + \beta \gtreqless 1$. Actualmente, este individuo trabaja en una ciudad en la que los precios de los bienes son $\mathbf{p}^0 = \left(p_1^0, p_2^0\right) = (p_1, p_2)$, pero la empresa le plantea el traslado, sin mejora salarial alguna, a otra ciudad donde el bien 1 tiene el mismo precio que en la anterior mientras que el bien 2 es el doble de caro, es decir, $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right) = (p_1, 2p_2)$.

1. Este individuo se lamenta diciendo que el traslado es tan perjudicial para su bienestar como si, quedándose en la primera ciudad, le hubiesen reducido el salario en el $A\%$. ¿Qué valor adopta A?

2. El mencionado individuo también afirma que aceptaría trasladarse si le ofrecieran una subida salarial de (al menos) el $B\%$. Calcular el valor de B.

3. Obtener la variación de excedente del consumidor que experimentaría dicho individuo en caso de trasladarse.

4. ¿Qué sucedería con los resultados obtenidos en los apartados 1, 2 y 3 si las preferencias del individuo viniesen representadas por la función de utilidad $z(q_1, q_2) = \alpha \ln q_1 + \beta \ln q_2$ en lugar de estar descritas por la función $u(\cdot)$?

Resolución

Si resolvemos el problema $MAX_{(q_1,q_2)}\ q_1^{\alpha} q_2^{\beta}$, s.a: $p_1 q_1 + p_2 q_2 \leq m$, se obtienen las demandas marshallianas

$$(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)) = \left(\frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)\, p_1}, \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)\, p_2}\right),$$

a partir de las cuales la función de utilidad indirecta que resulta es

$$v(\mathbf{p}, m) = \left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}, \tag{1}$$

y la función de gasto o función de renta compensada es

$$e(\mathbf{p}, u) = (\alpha+\beta) \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} u^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \tag{2}$$

Cuando los precios de los bienes son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$, la utilidad máxima que se obtiene es $v(\mathbf{p}^0, m) = \left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}$, mientras que a precios $\mathbf{p}^1 = (p_1, 2p_2)$ resulta $v(\mathbf{p}^1, m) = \left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{2p_2}\right)^{\beta}$. Por otra parte, en términos de gasto, se llega a $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = \frac{1}{2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} m$ y, finalmente, $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} m$.

1. En este caso se pide la cuantía de renta que debería tener el individuo para, a precios $\mathbf{p}^0$, alcanzar el nivel de utilidad final $v(\mathbf{p}^1, m)$. En otras palabras, se pide la *variación equivalente de la renta* (VER), la cual se define como $VER = e(\mathbf{p}^1, u^1) - e(\mathbf{p}^0, u^1)$. Como estamos analizando los efectos de un incremento de precios, lo que *pierde* el consumidor en términos de utilidad o bienestar es[1]

$$VER = m - \frac{m}{2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} = \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}\right) m. \tag{3}$$

[1] Dado que las medidas monetarias del bienestar se definen como áreas determinadas por funciones de demanda (hicksianas —en el caso de la variación compensadora y la variación equivalente— o marshallianas —en el caso de la variación del excedente del consumidor), carece de sentido tomarlas en términos negativos, ni siquiera cuando aumentan los precios de los bienes. En este caso, la cantidad positiva resultante debe ser interpretada como indicadora de reducción de bienestar.

Este individuo estaría dispuesto a ver reducida su renta en un porcentaje de hasta el $\left(1-\frac{1}{2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}\right)\%$ con tal de evitar el traslado. Dicho porcentaje es justamente el valor de A.

[Alternativamente, se puede argumentar averiguando qué cuantía de renta $\overline{m}$ debería tener el individuo para alcanzar la utilidad $v(\mathbf{p}^1, m)$ a precios $\mathbf{p}^0$. Dicha renta $\overline{m}$ debería ser tal que

$$\left(\frac{\overline{m}}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}=\left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{2p_2}\right)^{\beta}, \tag{4}$$

donde $\overline{m} = m - VER$. Resolviendo (4) en $\overline{m}$ se obtiene $\overline{m} = \frac{1}{2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}m$, lo cual quiere decir que el individuo estaría dispuesto a quedarse en la primera ciudad si su salario es al menos el $\frac{1}{2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}\%$ del salario inicial. Pero ello significa que el traslado equivale, en términos de bienestar, a sufrir una reducción del $\left(1-\frac{1}{2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}\right)\%$ en el salario, lo cual es justamente el resultado alcanzado en (3).]

2. Ahora el individuo está pensando en la *variación compensadora de la renta* (VCR) como cuantificación monetaria del cambio en su bienestar, es decir, en el incremento de salario que habría de recibir para, en términos de utilidad, tener el mismo nivel de satisfacción en la última ciudad que en la primera. Formalmente, $VCR = e(\mathbf{p}^1, u^0) - e(\mathbf{p}^0, u^0)$, de donde se obtiene

$$VCR = 2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}m - m = \left(2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1\right)m \tag{5}$$

como reducción de bienestar. Así pues, con un incremento del $\left(2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1\right)\%$ en el salario el individuo no notaría la pérdida de bienestar que, debido al incremento del precio del bien 2, le supondría el traslado. Y dicho incremento es el valor de B.

[El argumento manejado ha sido, simplemente, el de calcular el salario que el individuo debe tener para, a precios $\mathbf{p}^1$, alcanzar el nivel de utilidad $v(\mathbf{p}^0, m)$. Dicho salario $\widehat{m}$ será aquél para el cual se verifica la condición

$$\left(\frac{\widehat{m}}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{2p_2}\right)^{\beta}=\left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}, \tag{6}$$

siendo $\widehat{m} = m + VCR$. Resolviendo (6) resulta $\widehat{m} = 2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}m$, lo cual indica que el individuo aceptaría el traslado si ello conllevase un incremento del $\left(2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1\right)\%$ en su renta, resultado que coincide con el ofrecido en (5).]

3. La imposibilidad de observar las demandas hicksianas nos obliga a utilizar las demandas marshallianas para calcular el excedente del consumidor marshalliano. Ahora bien, estas

demandas proporcionan una medida correcta del bienestar siempre y cuando presenten elasticidad renta constante (en la renta) o, dicho de otra forma, siempre y cuando los efectos precio cruzados que exhiban sean simétricos.[2] En el presente caso, las preferencias del consumidor son homotéticas y $m^0 = m^1$, sólo varía el precio de un bien (con lo cual no existe el problema de la *independencia de senda*)[3] y la única demanda que resulta afectada por el cambio en p_2 es la demanda del bien 2, $q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)$. Además, $q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)$ tiene elasticidad renta constante, ya que $\eta = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m}\frac{m}{q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)} = 1$. Luego la medida del bienestar dada por la *variación del excedente del consumidor* (VEC)[4] se calcula como[5]

$$VEC = \int_{p_2}^{2p_2} q_2^{\mathrm{m}}(p_1^0, s, m)\mathrm{d}s = \int_{p_2}^{2p_2} \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)s}\mathrm{d}s = \frac{\beta}{\alpha+\beta} m \ln 2, \qquad (7)$$

lo cual significa que el traslado implica una pérdida en el bienestar del consumidor que, si la medimos a través de la VEC, es asimilable a un descenso del $\left(\frac{\beta \ln 2}{\alpha+\beta}\right)$ % de su renta.[6]

La discrepancia existente entre las tres evaluaciones del bienestar, (3), (5) y (7), se deriva del hecho de que las preferencias del individuo no son cuasilineales.

4. Dado que la función de utilidad $w(\cdot)$ es una transformación monótona de la función de utilidad $u(\cdot)$ $[w(\cdot) = \ln u$, siendo $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u} > 0]$, esta nueva función representa el mismo orden de preferencias que la función u, con lo cual los resultados de bienestar que se obtendrían con $w(\cdot)$ serían los mismos que los que se obtienen con la función de utilidad $u(\cdot)$. ■

Ejercicio 3.2

Consideremos un consumidor cuyo orden de preferencias sobre el dinero —bien 0— y la cantidad de un determinado bien de consumo, q, que puede comprar al precio p es el representado por la función de utilidad $u(q, q_0) = q^\alpha + q_0$, siendo $\alpha > 0$. El consumidor tiene una renta fija m que puede mantener como dinero o bien gastarla en adquirir el bien de consumo. Determinar su equilibrio, el excedente marshalliano que obtiene si adquiere q^* unidades del bien de consumo al precio de mercado p^*, así como la variación del excedente del consumidor (VEC) cuando el precio del bien de consumo se duplica en cada uno de los dos siguientes casos:

1. $\alpha = \frac{1}{2}$.

2. $\alpha = 2$.

[2] Cuando la elasticidad renta no es constante, aún pueden utilizarse aproximaciones de segundo orden.

[3] Para un análisis del problema de la senda de integración, véanse los Ejercicios 3.3 y 3.4.

[4] Para evitar confusión entre los límites de integración y la o las variables respecto de las cuales se integra se ha optado por denotar dichas variables por s (cuando sólo es una) y por s_1 y s_2 (cuando son dos).

[5] Obsérvese que la demanda $q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)$ no varía frente a cambios en p_2, por lo que no es necesario computar la variación del excedente del consumidor (VEC) respecto a $q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)$.

[6] Dado que la VEC se define como una integral y, en consecuencia es un área (valor positivo), adoptamos la convención de utilizar como límite inferior de la integral el valor inicial del precio y como límite superior el valor final cuando tiene lugar un aumento en dicho precio. Por el contrario, cuando se reduce el precio, utilizamos como límite inferior de la integral el valor final del precio y como límite superior el valor inicial.

Resolución

1. Este valor del parámetro α trata de ejemplificar la situación $\alpha < 1$, en la que la subfunción de utilidad q^α es cóncava y la función de utilidad $q^\alpha + q_0$ es cuasicóncava. Si el consumidor compra q unidades del producto, es evidente que en ello gasta la cantidad de renta pq y, por lo tanto, mantiene $q_0 = m - pq$ en forma de dinero. Entonces el nivel de consumo óptimo es el que resulta de

$$MAX_q \ u(q, m - pq) \equiv MAX_q \ \sqrt{q} - pq + m,$$

dando lugar dicho programa a $q^{\mathrm{m}}(p) = \frac{1}{4p^2}$ como función de demanda marshalliana del bien de consumo,[7] con lo cual el equilibrio del consumidor es el descrito por

$$\left(q^{\mathrm{m}}(p,m), q_0^{\mathrm{m}}(p,m)\right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4p^2}, m - \frac{1}{4p}\right), \text{ si } m > \frac{1}{4p} \\ \left(\frac{m}{p}, 0\right), \text{ si } m \leq \frac{1}{4p}. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la utilidad es cuasilineal, es evidente que si el precio de mercado del producto es p^* y la demanda es $q^*(p^*) = \frac{1}{4p^2}$, entonces el área definida por el excedente marshalliano del consumidor (EC) mide exactamente la utilidad que el individuo gana consumiendo la cantidad q^* al precio p^* (con respecto a la situación en la que consumiese $q = 0$). Dicha ganancia de utilidad es

$$\begin{aligned} EC(q^*) &= \int_0^{q^*} \frac{1}{2\sqrt{q}} \mathrm{d}q - p^* q^* \\ &= \sqrt{q^*} - p^* q^* \\ &= u(q^*, m - p^* q^*) - m. \end{aligned} \tag{8}$$

Es decir, cuando las preferencias son cuasilineales (como las representadas por $u = \sqrt{q} - pq + q_0$), la función de subutilidad $\sqrt{q} - pq$ mide lo que el consumidor gana, en términos de bienestar, al consumir q unidades (en el equilibrio interior) o, lo que es lo mismo, $pq = \sqrt{q}$ representa la cantidad máxima que el consumidor está dispuesto a pagar en términos del otro bien (dinero) —disponibilidad marginal a pagar— por consumir q.[8]

Para evaluar el cambio de bienestar mediante la VEC cuando los precios pasan de ser los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = \left(p^0, 1\right) = (p, 1)$ a ser los dados por $\mathbf{p}^1 = \left(p^1, 1\right) = (2p, 1)$, es necesario analizar tres posibles escenarios:

(a) Si la renta del consumidor y el precio del bien de consumo verifican la condición $m > \frac{1}{4p}$, el equilibrio del consumidor en términos de demandas marshallianas es de tipo interior, tanto en la situación inicial de precios como en la final, en cuyo caso

$$VEC = \int_{p^0}^{p^1} \frac{1}{4p^2} \mathrm{d}p = \int_p^{2p} \frac{1}{4s^2} \mathrm{d}s = \frac{1}{8p}.$$

[7] Se trata de una función de elasticidad-precio constante, $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

[8] Es evidente que esta propiedad no se satisface en el equilibrio de esquina.

(b) Si $\frac{1}{8p} < m < \frac{1}{4p}$, el equilibrio es de esquina en la situación inicial de precios e interior en la situación final, en cuyo caso[9]

$$VEC = \int_{p}^{p^*=\frac{1}{4m}} \frac{m}{s}\mathrm{d}s + \int_{p^*=\frac{1}{4m}}^{2p} \frac{1}{4\left(2s\right)^2}\mathrm{d}s = \frac{8pm-1}{32p} - m\ln 4pm.$$

(c) Finalmente, si $m < \frac{1}{8p}$, el equilibrio del consumidor es del tipo $\left(q^{\mathrm{m}}, q_0^{\mathrm{m}}\right) = \left(\frac{m}{p}, 0\right)$ en las dos situaciones de precios y, con ello, el aumento en p conduce a una reducción de bienestar igual a

$$VEC = \int_{p^0}^{p^1} \frac{m}{p}\mathrm{d}p = \int_{p}^{2p} \frac{m}{s}\mathrm{d}s = m\ln 2.$$

2. Ahora se trata de ejemplificar el caso $\alpha > 1$ y en el que, por lo tanto, la subfunción de utilidad q^{α} es convexa, si bien la función de utilidad $q^{\alpha} + q_0$ continúa siendo cuasicóncava. En estas circunstancias, y de acuerdo con el resultado del Ejercicio 1.13, el equilibrio del consumidor en términos de demandas marshallianas es el dado por

$$\left(q^{\mathrm{m}}\left(p,m\right), q_0^{\mathrm{m}}\left(p,m\right)\right) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p}, 0\right), \text{ si } m > p^2 \\ \left(0, m\right), \text{ si } m \leq p^2 \end{cases}$$

y es evidente que no se verifica el resultado establecido en (8), por cuanto[10]

$$\begin{aligned} EC\left(q^*\right) &= \int_0^{q^*} \frac{m}{q}\mathrm{d}q - p^*q^* \\ &\neq u\left(q^*, m - p^*q^*\right) - m. \end{aligned}$$

Por último, para evaluar el cambio de bienestar provocado por el aumento del precio del bien de consumo de p a $2p$ es necesario considerar tres escenarios posibles:

(a) Si $m > 4p^2$, el equilibrio del consumidor es siempre del tipo $\left(q^{\mathrm{m}}, q_0^{\mathrm{m}}\right) = \left(\frac{m}{p}, 0\right)$, tanto en la situación inicial de precios como en la situación final, con lo cual al duplicarse el precio del bien el bienestar del consumidor disminuye en

$$VEC = \int_{p}^{2p} \frac{m}{s}\mathrm{d}s = m\ln 2.$$

[9] O si se prefiere,

$$VEC = \int_{p}^{p^*=\frac{1}{8m}} \frac{m}{s}\mathrm{d}s + \int_{p^*=\frac{1}{8m}}^{p^{**}=\frac{1}{4m}} \frac{m}{s}\mathrm{d}s + \int_{p^{**}=\frac{1}{4m}}^{2p} \frac{1}{4\left(2s\right)^2}\mathrm{d}s = \frac{8pm-1}{32p} - m\ln 4pm.$$

[10] Nótese que ahora no es posible calcular el EC porque la función de demanda es asintótica al eje del precio y la integral correspondiente no converge. En este caso, el EC se podría obtener *aproximadamente* de la siguiente forma: si suponemos que $q^{\mathrm{m}} = 0$ cuando p es suficientemente alto respecto a p^*, por ejemplo, $p \geq \alpha p^*$, $\alpha > 1$, entonces $EC = \int_{p^*}^{\alpha p^*} \frac{m}{s}\mathrm{d}s = m\ln\alpha$. Ahora bien, en puridad este análisis es válido sólo cuando nos limitamos a variaciones pequeñas en p, ya que el EC depende del precio máximo que utilicemos como límite.

(b) Si $4p^2 > m > p^2$, el equilibrio del consumidor en la situación inicial de precios es del tipo $\left(\frac{m}{p}, 0\right)$, mientras que el equilibrio en la situación final es del tipo $(0, m)$. Con ello,

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p}^{p^*=\sqrt{m}} \frac{m}{s}\mathrm{d}s + \int_{p^*=\sqrt{m}}^{2p} 0 \cdot \mathrm{d}s \\ &= \frac{m}{2} \ln \frac{m}{p}. \end{aligned}$$

(c) Finalmente, cuando $m < p^2$, es evidente que el equilibrio del consumidor es siempre del tipo $(q^{\mathrm{m}}, q_0^{\mathrm{m}}) = (0, m)$, en cuyo caso la medida VEC de variación de bienestar es

$$VEC = 0,$$

lo que completa la resolución del ejercicio. ■

Ejercicio 3.3

¿Bajo qué condiciones una medida cuantitativa del bienestar basada en la integración de una o varias funciones de demanda es aceptable?

Resolución

Una medida de bienestar basada en la integración de una o varias funciones de demanda es aceptable si:[11]

(a) Verifica la propiedad de independencia de senda, es decir, no depende de la senda de integración que se elija entre $(\mathbf{p}^0, m^0)$ y $(\mathbf{p}^1, m^1)$, y

(b) El ranking respecto a la medida de bienestar concuerda con el ranking derivado de la función de utilidad indirecta.

La variación compensadora de la renta (VCR) y la variación equivalente de la renta (VER) son medidas que satisfacen la propiedad (a), es decir, no dependen de la senda de integración de las demandas hicksianas. La VER verifica también la propiedad (b), ya que concuerda con la función de utilidad indirecta en el sentido de que para todo $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$ y m, resulta

$$VER(\mathbf{p}^0, m) \lesseqgtr VER(\mathbf{p}^1, m) \Leftrightarrow v(\mathbf{p}^0, m) \lesseqgtr v(\mathbf{p}^1, m),$$

mientras que la VCR no satisface, en general, la condición (b).

La VCR y la VER son las medidas conceptualmente correctas para efectuar valoraciones monetarias del bienestar, pero tienen el inconveniente de ser inobservables por cuanto están basadas en la integración de una o varias funciones de demanda hicksiana y, como sabemos, éstas son inobservables. Es por ello que, desde una perspectiva práctica, estamos obligados a utilizar las demandas marshallianas y, a partir de ellas, la variación del excedente del consumidor

[11] Véase Vives (2000).

marshalliano (VEC) como medida del bienestar. Ahora bien, la propiedad (a) requiere que todas las funciones de demanda marshallianas sean homotéticas, es decir, requiere que $q_j^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m) = f(\mathbf{p}) \cdot m$, para todo $j = 1, ..., J$, cosa que no siempre sucede. Es decir, a veces la medida de bienestar dada por VEC no satisface las propiedades deseables (a) y (b).[12] De hecho, VEC es una medida aceptable del bienestar únicamente en los dos siguientes casos:

(i) Cuando las preferencias son cuasilineales en un bien numerario, en cuyo caso la utilidad marginal de la renta depende sólo del precio del numerario y los efectos precio cruzados de las demandas marshallianas de los bienes distintos del numerario son simétricos.[13]

(ii) Cuando las preferencias son homotéticas y $m^0 = m^1$, en cuyo caso la utilidad marginal de la renta depende sólo del nivel de renta (el cual es constante) y los efectos precio cruzados vuelven a ser simétricos.[14]

En definitiva, y si nos restringimos al caso de dos bienes, $j = 1, 2$, las demandas marshallianas $q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)$ y $q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)$ han de exhibir elasticidades renta constantes, cosa que sucede si y sólo si se cumple la condición

$$\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)}{\partial p_1}, \tag{9}$$

ya que en la ecuación de Slustky se satisface que $\frac{\partial q_1^{\mathrm{h}}(\mathbf{p},u)}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2^{\mathrm{h}}(\mathbf{p},u)}{\partial p_1}$ y, por lo tanto, si $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}$, entonces debe verificarse que $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial m} q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial m} q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)$, lo cual se puede reescribir como $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial m} \frac{m}{q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)} = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial m} \frac{m}{q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}$. De esta forma se completa la resolución del ejercicio. ■

Ejercicio 3.4

Demostrar el resultado del Ejercicio 3.3, según el cual al variar los precios de varios bienes la condición suficiente para que exista *independencia de senda* en la medida monetaria de bienestar es que el efecto renta de las funciones de demanda marshalliana de todos y cada uno de los bienes sea nulo, $\frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial m}$, $j = 1, 2$.

Resolución

Consideremos, sin mayor pérdida de generalidad, el caso de dos bienes, $j = 1, 2$, cuyas demandas marshallianas son las dadas por $q_1^{\mathrm{m}}(p_1, p_2, m)$ y $q_2^{\mathrm{m}}(p_1, p_2, m)$. Supongamos, además, que ambos bienes son complementarios brutos entre sí en el sentido de que $\frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_{j'}} < 0$, $j, j' = 1, 2; j \neq j'$,[15] y, finalmente, que los precios iniciales de los bienes son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1^0, p_2^0)$ en

[12] Véase el Ejercicio 3.4.

[13] En este caso, todas las medidas de bienestar ofrecen, además, el mismo resultado cuantitativo.

[14] Las preferencias homotéticas dan lugar a demandas marshallianas $q_j^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)$, $j = 1, ..., J$, homotéticas.

[15] Si los bienes fuesen sustitutivos brutos en el sentido de verificar la condición $\frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}}{\partial p_{j'}} > 0$, $j, j' = 1, 2; j \neq j'$, el razonamiento sería análogo.

tanto que los precios finales son los dados por $\mathbf{p}^1 = (p_1^1, p_2^1)$, con $p_1^1 < p_1^0$ y $p_2^1 < p_2^0$. Toda esta información se resume gráficamente en la siguiente figura:

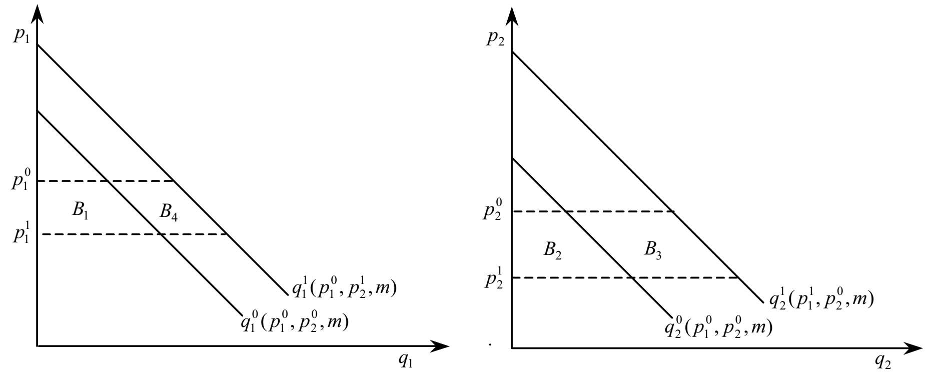

Fig. 1 *La medida VEC de bienestar individual*

1. Consideremos la siguiente senda de variación de los precios: primero se reduce p_1 de p_1^0 a p_1^1 (permaneciendo p_2 constante en p_2^0) y luego, una vez que p_1 ha alcanzado el valor p_1^1, p_2 disminuye de p_2^0 a p_2^1 (permaneciendo p_1 constante en p_1^1).

   Observando la Figura 1, es evidente que si p_2 permanece constante en p_2^0, la variación del bienestar del consumidor provocada por una reducción en p_1 ($p_1^1 < p_1^0$) es el área delimitada por las rectas de precios y la demanda relevante, $q_1^0\left(p_1^0, p_2^0, m\right)$, es decir, es el área B_1.[16] A su vez, el descenso de p_1 desde p_1^0 hasta p_1^1 cambia la demanda del bien 2 de $q_2^0\left(p_1^0, p_2^0, m\right)$ a $q_2^1\left(p_1^1, p_2^0, m\right)$. Con ello, y si ahora suponemos que disminuye p_2 ($p_2^1 < p_2^0$) permaneciendo p_1 constante en p_1^1, la variación de bienestar es el área comprendida entre las rectas de precios y la demanda relevante, $q_2^1\left(p_1^1, p_2^0, m\right)$, es decir, es el área $B_2 + B_3$.

   Por lo tanto, el bienestar total del consumidor derivado de la secuencia de reducción de precios que hemos supuesto (reducción en p_1 y luego reducción en p_2) es el área

$$VEC = B_1 + (B_2 + B_3)\,. \tag{10}$$

   En términos de integrales, la senda de variación de precios considerada anteriormente da lugar a la medida de bienestar

$$VEC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} q_1^0\left(p_1, p_2^0, m\right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^1}^{p_2^0} q_2^1\left(p_1^1, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2, \tag{10a}$$

   donde hemos fijado $p_2 = p_2^0$ (en la función integrando de la primera integral) y hemos variado p_1, y luego hemos fijado $p_1 = p_1^1$ (en la función integrando de la segunda integral) para analizar la variación producida en p_2.

[16] Si $q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)$ no dependiese de p_1, ésta sería la única variación de bienestar que se produciría.

2. La anterior secuencia de cambios de precios no es, ni mucho menos, la única posible. Otra senda de variación de precios entre la situación $\mathbf{p}^0$ y la situación $\mathbf{p}^1$ que podríamos haber considerado es la siguiente: suponer que primero disminuye p_2 (permaneciendo p_1 constante en p_1^0) y, luego, suponer que disminuye p_1 (permaneciendo p_2 constante una vez que ha alcanzado el valor p_2^1).

   A la luz de la Figura 1 es claro que si $p_1 = p_1^0$, la variación de bienestar provocada por la reducción en p_2 de p_2^0 hasta p_2^1 es el área B_2,[17] ya que el consumidor está situado en $q_2^0\left(p_1^0, p_2^0, m\right)$. Ahora bien, la reducción de p_2 provoca que la demanda del bien 1 aumente de $q_1^0\left(p_1^0, p_2^0, m\right)$ a $q_1^1\left(p_1^0, p_2^1, m\right)$. Por lo tanto, si a continuación del descenso en p_2, p_1 disminuye $(p_1^1 < p_1^0)$ permaneciendo p_2 constante en p_2^1, el cambio de bienestar es el área comprendida entre las líneas de precios y $q_1^1\left(p_1^0, p_2^1, m\right)$, es decir, es el área $B_1 + B_4$.

   En suma, la variación total del bienestar del consumidor por el hecho de haberse reducido, primero, p_2 y, luego, p_1 es el área

$$VEC = B_2 + (B_1 + B_4)\,. \tag{11}$$

   En términos de integrales, la expresión (11) se escribe como

$$VEC = \int_{p_2^1}^{p_2^0} q_2^0\left(p_1^0, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 + \int_{p_1^1}^{p_1^0} q_1^1\left(p_1, p_2^1, m\right) \mathrm{d}p_1, \tag{11a}$$

   donde ahora, primero, mantenemos fijo $p_1 = p_1^0$ e integramos la función de demanda del bien 2 respecto a p_2 y, luego, mantenemos fijo $p_2 = p_2^1$ e integramos la función de demanda del bien 1 respecto a p_1.

Nos gustaría que la medida de bienestar obtenida cuando varía más de un precio fuese la misma bajo el procedimiento 1 (expresiones (10)-(10a)) que bajo el procedimiento 2 (expresiones (11)-(11a)), es decir, que fuese independiente de la senda concreta de variación de precios que se considerase ("path independent"). Y ello por una razón muy sencilla: Como quiera que al cambiar varios precios éstos pueden hacerlo en la realidad de manera simultánea (y no secuencial), el orden en el que conceptualmente los hacemos variar —por motivos de integración— no debería afectar a la medida del bienestar total que obtuviésemos. Formalmente, esto requiere que se verifique

$$B_1 + (B_2 + B_3) = B_2 + (B_1 + B_4)$$

o, lo que es lo mismo, que

$$B_3 = B_4. \tag{12}$$

¿Cuándo se cumple la condición (12)? Si las variaciones de precios no son muy acusadas, es decir, si $\mathbf{p}^1$ está relativamente próximo a $\mathbf{p}^0$, entonces las curvas de demanda pueden ser vistas

[17] Si sólo variase p_2, éste sería el único cambio que se produciría en el bienestar del consumidor.

como lineales en el rango de precios considerado.[18] Esto significa que B_3 y B_4 son áreas de figuras paralelográmicas y, por lo tanto, pueden expresarse, respectivamente, como

$$B_3 = \Delta p_2 \cdot \Delta q_2$$

y

$$B_4 = \Delta p_1 \cdot \Delta q_{1,}$$

donde Δp_j es el cambio del precio p_j y Δq_j el cambio en la cantidad consumida q_j que resulta del cambio en la demanda $q_j(\cdot)$ debido al cambio en $p_{j'}$ manteniéndose p_j constante. Más concretamente, Δq_2 es el cambio en la cantidad consumida del bien 2 debido al desplazamiento de $q_2(\cdot)$ desde $q_2^0\left(p_1^0, p_2^0, m\right)$ hasta $q_2^1\left(p_1^1, p_2^0, m\right)$ y Δq_1 es el cambio en la cantidad consumida del bien 1 debido al desplazamiento de $q_1(\cdot)$ desde $q_1^0\left(p_1^0, p_2^0, m\right)$ hasta $q_1^1\left(p_1^0, p_2^1, m\right)$.[19] Ahora bien, si $\Delta p_{j'}$ es suficientemente pequeño, entonces Δq_j se puede aproximar como

$$\Delta q_j \simeq \frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_{j'}} \cdot \Delta p_{j'},\ j, j' = 1, 2; j \neq j',$$

con lo cual

$$B_3 \simeq \Delta p_2 \cdot \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_1} \cdot \Delta p_1$$

y

$$B_4 \simeq \Delta p_1 \cdot \frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_2} \cdot \Delta p_2.$$

Por lo tanto, la condición $B_3 = B_4$ se satisface (aproximadamente) siempre y cuando los efectos precio cruzados sean simétricos, es decir, siempre y cuando

$$\frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_1} = \frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_2}. \tag{13}$$

De acuerdo con la ecuación de Slutsky de los efectos cruzados, los efectos precio cruzados dados en (13) se expresan como la suma de los efectos sustitución cruzados y los efectos renta

$$\frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_{j'}} = \frac{\partial q_j^{\mathrm{h}}(\cdot)}{\partial p_{j'}} - \frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} \cdot q_{j'}^{\mathrm{m}}(\cdot),\ j, j' = 1, 2; j \neq j', \tag{14}$$

con lo cual, y teniendo en cuenta que los efectos sustitución cruzados contenidos en (14) son simétricos, es evidente que la condición suficiente para que se verifique (13) —y con ello (12)— es que los efectos renta de todos y cada uno de los bienes sean nulos,

$$\frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} = 0,\ j = 1, 2, \tag{15}$$

[18] Si existe mucha lejanía entre $\mathbf{p}^1$ y $\mathbf{p}^0$, la “aproximación lineal de las curvas de demanda entre $\mathbf{p}^0$ y $\mathbf{p}^1$” no es necesariamente una buena aproximación.

[19] Si las demandas marshallianas de los bienes no pudiesen ser consideradas como lineales, entonces tendríamos $B_3 = \int_{p_2^1}^{p_2^0} \left[q_2^1\left(p_1^1, p_2, m\right) - q_2^0\left(p_1^0, p_2, m\right)\right] \mathrm{d}p_2$ y $B_4 = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \left[q_1^1\left(p_1, p_2^1, m\right) - q_1^0\left(p_1, p_2^0, m\right)\right] \mathrm{d}p_1$.

o bien, si $\frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} \neq 0$, $j = 1, 2$, que se satisfaga la condición necesaria y suficiente

$$\frac{\partial q_j^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} \cdot q_{j'}^{\mathrm{m}}(\cdot) = \frac{\partial q_{j'}^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} \cdot q_j^{\mathrm{m}}(\cdot). \tag{16}$$

En ambos casos, tanto en (15) como en (16), nuestra medida de bienestar es "path independent".

En términos más generales y a modo de recapitulación, el punto importante a la hora de calcular la VEC es que al modificarse varios precios (más de uno) es preciso considerar la senda concreta que siguen los precios entre los valores iniciales y finales. En efecto, dado que entre $\mathbf{p}^0 = \left(p_1^0, p_2^0\right)$ y $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right)$ podemos utilizar muchas sendas de cambios de precios, según se muestra en la siguiente figura,

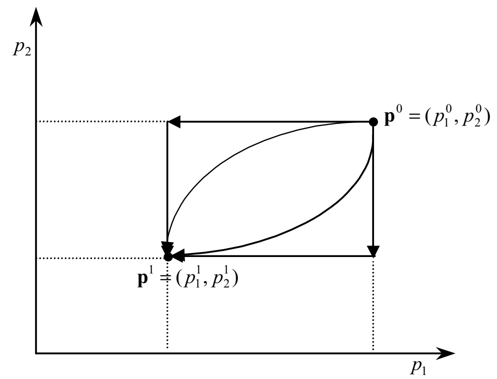

Fig. 2 *El problema de la trayectoria*

la pregunta que surge de manera natural es averiguar cuál de ellas es la trayectoria adecuada.

A título de ejemplo, supongamos que los precios de los bienes 1 y 2 cambian simultáneamente, es decir, supongamos que la situación inicial se caracteriza por $\left(p_1^0, p_2^0, \widehat{\mathbf{p}}, m\right)$ y la situación final por $\left(p_1^1, p_2^1, \widehat{\mathbf{p}}, m\right)$, siendo $\widehat{\mathbf{p}} = (p_3, ..., p_J)$ el subvector de precios de los restantes bienes, precios que permanecen inalterados entre la situación inicial y la final. Además, supongamos que $q_j^{\mathrm{m}}(p_1, p_2, \widehat{\mathbf{p}}, m)$, $\forall j = 1, ..., J$. Entonces, es evidente que podemos:

(a) Integrar $q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)$ sobre la región entre p_1^0 y p_1^1 y luego integrar $q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)$ entre p_2^0 y p_2^1 manteniendo p_1 fijo en p_1^1, o bien

(b) Integrar $q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)$ sobre la región entre p_2^0 y p_2^1 manteniendo p_1 fijo en p_1^0 y luego integrar $q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)$ entre p_1^0 y p_1^1 manteniendo p_2 fijo en p_2^1.

Económicamente, no existe diferencia entre (a) y (b). Sin embargo, matemáticamente pueden producirse resultados diferentes, ya que el valor de la integral puede depender de la senda que elijamos entre los dos límites de integración, $\mathbf{p}^0$ y $\mathbf{p}^1$.

Si las demandas $q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)$ y $q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)$ exhiben elasticidades renta constantes,[20] la expresión

$$\int q_1^{\mathrm{m}}(p_1, p_2, m)\mathrm{d}p_1 + \int q_2^{\mathrm{m}}(p_1, p_2, m)\mathrm{d}p_2$$

[20] Ello sucede siempre y cuando se verifique la condición (9) del Ejercicio 3.3.

es independiente de la senda que consideremos en la variación de los precios a la hora de integrar las funciones de demanda. La simetría de los efectos precio cruzados garantiza, pues, que el excedente marshalliano del consumidor es independiente de la trayectoria elegida cuando las elasticidades renta de las demandas son constantes, siendo en dicho caso una valoración adecuada del bienestar.

Debemos tener cuidado, sin embargo, en no extender demasiado lejos este argumento por dos razones. Una, porque no todos los bienes pueden presentar efecto renta nulo (excepto cuando se trata de preferencias cuasilineales). Y si los efectos renta son distintos de cero, lo que podemos medir no es generalmente lo que queremos medir y la medida de bienestar que obtengamos no es independiente del orden en el que (por motivos conceptuales) se supone que varían los precios.

La otra razón es que la medida de bienestar es una medida esencialmente parcial y no puede ser utilizada cuando se consideran cambios en los precios de todos los bienes. Es necesario, pues, restringir la utilización de dicha medida a aquellos casos en los que sólo varía un número reducido (relativamente) de precios. ■

Ejercicio 3.5

Determinar el resultado de los apartados 1, 2 y 3 del Ejercicio 3.1 si los precios de los bienes en la primera ciudad son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = \left(p_1^0, p_2^0\right) = (p_1, p_2)$ mientras que los de la segunda ciudad son los dados por el vector $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right) = (3p_1, 2p_2)$.

Resolución

En este caso varían los precios de más de uno de los bienes, lo cual ha de ser tenido especialmente en cuenta a la hora de calcular la variación del excedente del consumidor. De acuerdo con la expresión (1), el nivel de utilidad a precios $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ es $v(\mathbf{p}^0, m) = \left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}$, mientras que a precios $\mathbf{p}^1 = (3p_1, 2p_2)$ es $v(\mathbf{p}^1, m) = \left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{3p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{2p_2}\right)^{\beta}$. A su vez, y dada la función de gasto definida en la expresión (2), los respectivos niveles de gasto son $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} m$, $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 3^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} 2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} m$ y $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$. A partir de aquí, las evaluaciones monetarias del cambio en el nivel de bienestar del individuo se obtienen de la siguiente manera:

1. Si consideramos que el nivel de utilidad adecuado como objetivo es u^1, la VER se obtiene como

$$VER = e(\mathbf{p}^1, u^1) - e(\mathbf{p}^0, u^1) = \left(\frac{1}{3^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} 2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} - 1\right) m, \tag{17}$$

   lo cual denota que el aumento habido en los precios produce un descenso de bienestar del individuo equivalente a una reducción del $\left(\frac{1}{3^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} 2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} - 1\right)$% en su renta de la situación inicial. Esta reducción de renta es ahora el valor adoptado por A.

2. Si el nivel de utilidad adecuado como objetivo es u^0, la VCR se determina como

$$VCR = e(\mathbf{p}^1, u^0) - e(\mathbf{p}^0, u^0) = \left(3^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} 2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1\right) m, \tag{18}$$

lo cual indica que, ante el incremento habido en todos los precios, el aumento que tendría que experimentar la renta del consumidor para mantener constante su nivel de utilidad inicial debería ser del $\left(3^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} 2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - 1\right)$%. Éste es el valor que adopta B.

3. En este caso, y dado que las demandas marshallianas de ambos bienes tienen elasticidades renta constantes,[21] la VEC se obtiene de la siguiente manera. De acuerdo con la expresión (10a),[22]

$$VEC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^0, m\right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^1}^{p_2^0} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2, \tag{19}$$

y dado que la demanda de cada bien depende únicamente de su propio precio, es decir, dado que $q_1^{\mathrm{m}}(p_1, m)$ y $q_2^{\mathrm{m}}(p_2, m)$, la expresión (19) queda reducida a

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}(p_1, m)\, \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}(p_2, m)\, \mathrm{d}p_2 \\ &= \int_{p_1}^{3p_1} \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)s_1} \mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{2p_2} \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)s_2} \mathrm{d}s_2 \\ &= \frac{\alpha \ln 3 + \beta \ln 2}{\alpha+\beta} m, \end{aligned} \tag{19a}$$

como pérdida de bienestar.

[Alternativamente, la VEC también se podría haber obtenido como

$$\begin{aligned} VEC = & \int_{p_1^0}^{\widetilde{p}_1} q_1^{\mathrm{m}}(p_1, p_2^0, m)\mathrm{d}p_1 - \int_{p_1^1}^{\overline{p}_1} q_1^{\mathrm{m}}(p_1, p_2^1, m)\mathrm{d}p_1 \\ & + \int_{p_2^0}^{\widetilde{p}_2} q_2^{\mathrm{m}}(p_1^0, p_2, m)\mathrm{d}p_1 - \int_{p_2^1}^{\overline{p}_2} q_2^{\mathrm{m}}(p_1^1, p_2, m)\mathrm{d}p_2, \end{aligned} \tag{19b}$$

donde $\widetilde{p}_1$ es el precio tal que $q_1^{\mathrm{m}}(\widetilde{p}_1, p_2^0, m) = 0$, $\overline{p}_1$ el precio para el cual $q_1^{\mathrm{m}}(\overline{p}_1, p_2^1, m) = 0$, $\widetilde{p}_2$ el precio tal que $q_2^{\mathrm{m}}(p_1^0, \widetilde{p}_2, m) = 0$ y $\overline{p}_2$ es el precio que hace que $q_2^{\mathrm{m}}(p_1^1, \overline{p}_2, m) = 0$. En este caso, y dado que para las demandas marshallianas existentes de los dos bienes el eje del respectivo precio es una asíntota (vertical) para cada una de ellas, es evidente que

[21] En general, las preferencias homotéticas dan lugar a funciones de demanda marshallianas con elasticidad renta igual a 1 o, lo que es lo mismo, a sendas de expansión lineales en el plano $\{q_1, q_2\}$.

[22] O, alternativamente, la expresión que resultase de tomar otra senda de variación de precios distinta a ésta a la hora de integrar las funciones de demanda marshallianas. Véase la expresión (11a).

$\widetilde{p}_1 = \infty$, $\overline{p}_1 = \infty$, $\widetilde{p}_2 = \infty$ y $\overline{p}_2 = \infty$. Con ello, la expresión (19b) se reescribe como

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1}^{\infty} \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)s_1}\mathrm{d}s_1 - \int_{3p_1}^{\infty} \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)s_1}\mathrm{d}s_1 \\ &\quad + \int_{p_2}^{\infty} \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)s_2}\mathrm{d}s_2 - \int_{2p_2}^{\infty} \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)s_2}\mathrm{d}s_2, \end{aligned}$$

y a partir de la cual se obtiene el mismo resultado que el alcanzado en (19a).]

[Todo el desarrollo anterior surge de variaciones en los precios de los bienes manteniéndose la renta constante. Si, alternativamente, lo que varía es la renta del consumidor entre la situación inicial y la final, mientras que los precios de los bienes se mantienen inalterados, el cálculo de la variación del bienestar del consumidor es inmediato a través de la función de utilidad indirecta. A título de ejemplo, supongamos que la renta del individuo en la situación final es el doble de la renta en la situación inicial, $m^0 = m$, $m^1 = 2m$, mientras que los precios se mantienen constantes. Para determinar el incremento de bienestar que ello supone, basta comparar

$$v(\mathbf{p}, 2m) = \left(\frac{2m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}$$

con $v(\mathbf{p}, m)$ dada en (1) y concluir que

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}, 2m) - v(\mathbf{p}, m) &= \left(2^{\alpha+\beta} - 1\right) \left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta} \\ &= \left(2^{\alpha+\beta} - 1\right) v(\mathbf{p}, m), \end{aligned}$$

es decir, el bienestar del individuo aumenta en $\left(2^{\alpha+\beta} - 1\right)$ veces su bienestar inicial.][23] ■

Ejercicio 3.6

Si las preferencias de un determinado consumidor vienen representadas por la función de utilidad $U(q_1, q_2, q_0) = \alpha(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}\left(\beta q_1^2 + 2\gamma q_1 q_2 + \beta q_2^2\right) + q_0$, donde los parámetros α, β y γ son tales que $\alpha, \beta > 0$, $\gamma \gtreqless 0$ y $\beta > \gamma$, calcular la VEC como medida de la variación de su bienestar cuando los precios de los bienes son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = \left(p_1^0, p_2^0\right) = (p_1, p_2)$ en una situación inicial y por $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right) = (2p_1, 2p_2)$ en una situación final, mientras que $m^0 = m^1 = m$ es la renta del mencionado consumidor en las dos situaciones.

Resolución

En este caso las preferencias son cuasilineales, con lo cual las demandas marshallianas de los bienes 1 y 2 que configuran el equilibrio interior van a estar libres de efecto renta. De acuerdo

[23] También podríamos analizar el efecto producido en el bienestar por cambios en $\mathbf{p}$ y m simultáneamente.

con el resultado obtenido en el Ejercicio 1.14 adaptado al caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ y $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, dichas demandas marshallianas son las dadas por

$$\left(q_1^{\mathrm{m}}(p_1,p_2), q_2^{\mathrm{m}}(p_1,p_2)\right) = \left(a - bp_1 + cp_2, a + cp_1 - bp_2\right),$$

donde $a = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $b = \frac{\beta}{\beta^2-\gamma^2}$ y $c = \frac{\gamma}{\beta^2-\gamma^2}$.

La cuasilinealidad de las preferencias implica que la VEC es independiente del orden de integración que utilicemos (cuando la demanda de cada bien depende de los precios de todos los bienes como sucede en este caso).[24] En efecto, si $q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)$ y $q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)$ son independientes de m (con lo cual el efecto renta es nulo), la VEC toma el mismo valor si primero integramos $q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^0, m\right)$ respecto a p_1 (manteniendo p_2 constante en p_2^0) y luego integramos $q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right)$ respecto a p_2 (manteniendo p_1 constante una vez que ha alcanzado el valor p_1^1), es decir, si calculamos

$$VEC = \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^0, m\right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2, \tag{20}$$

que si primero integramos $q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^0, p_2, m\right)$ respecto a p_2 (manteniendo p_1 constante en p_1^0) y luego integramos $q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^1, m\right)$ respecto a p_1 (manteniendo p_2 constante en p_2^1), es decir, si planteamos

$$VEC = \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1^0, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 + \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^1, m\right) \mathrm{d}p_1. \tag{21}$$

Veamos como el orden de integración es irrelevante para la medida VEC de bienestar: Si elegimos la senda de variación de precios de la expresión (20), el resultado es

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1}^{2p_1} \left(a - bs_1 + cp_2\right) \mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{2p_2} \left[a + c(2p_1) - bs_2\right] \mathrm{d}s_2 \\ &= \left[as_1 - \frac{b}{2}s_1^2 + cp_2 s_1\right]_{p_1}^{2p_1} + \left[as_2 + c(2p_1)s_2 - \frac{b}{2}s_2^2\right]_{p_2}^{2p_2} \\ &= a\left(p_1 + p_2\right) + 3cp_1p_2 - \frac{3}{2}b\left(p_1^2 + p_2^2\right), \end{aligned} \tag{20a}$$

mientras que si elegimos la senda de variación de precios de la expresión (21), llegamos a

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_2}^{2p_2} \left(a + cp_1 - bs_2\right) \mathrm{d}s_2 + \int_{p_1}^{2p_1} \left[a - bs_1 + c(2p_2)\right] \mathrm{d}s_1 \\ &= \left[as_2 + cp_1 s_2 - \frac{b}{2}s_2^2\right]_{p_2}^{2p_2} + \left[as_1 - \frac{b}{2}s_1^2 + c(2p_2)s_1\right]_{p_1}^{2p_1} \\ &= a\left(p_1 + p_2\right) + 3cp_1p_2 - \frac{3}{2}b\left(p_1^2 + p_2^2\right), \end{aligned} \tag{21a}$$

[24] Obviamente, cuando sólo varía el precio de un bien o cuando la demanda marshalliana de cada uno de los bienes depende únicamente de su propio precio, este problema ni siquiera se plantea.

resultado que coincide con el obtenido en (20a). La explicación es como sigue: Dado que las preferencias subyacentes son cuasilineales en un numerario, los efectos renta de las demandas de los bienes 1 y 2 son nulos, $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} = 0$ (ya que los efectos renta que se producen son absorbidos en su totalidad por el bien que actúa como numerario) y, en consecuencia, los efectos precio cruzados son simétricos, $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_2} = c = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_1}$. ■

Ejercicio 3.7

Consideremos un individuo que consume los bienes 1 y 2 y se enfrenta a una situación inicial de mercado caracterizada por los precios $\mathbf{p}^0 = \left(p_1^0, p_2^0\right) = (p_1, p_2)$ y la renta m. Calcular la VCR, la VER y la VEC para cada uno de los tres siguientes tipos de preferencias, $u(q_1, q_2) = q_1 q_2$, $u(q_1, q_2) = \min\{q_1, q_2\}$ y $u(q_1, q_2) = q_1 + q_2$, cuando:

1. En una situación final, los precios pasan a ser $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right) = (2p_1, 3p_2)$, mientras que la renta del consumidor continúa siendo m.

2. El sistema de precios de la situación final es el representado por el vector $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right) = \left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{3}\right)$, en tanto que la renta del consumidor permanece fija en m.

Resolución

En todos los casos se trata de preferencias homotéticas y, por lo tanto, las funciones de demanda marshallianas correspondientes se pueden escribir como $q_j^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m) = f(\mathbf{p}) \cdot m$, $j = 1, 2$. Además, dado que $m^0 = m^1$, queda garantizado que la VEC satisface la propiedad de independencia de senda.

1. Particularizando los resultados del Ejercicio 3.1 al caso en el que $\alpha = \beta = 1$, es inmediato deducir de la expresión (1) que $v(\mathbf{p}, m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ es la función de utilidad indirecta, por lo que $e(\mathbf{p}, u) = 2\sqrt{p_1p_2u}$ es la función de gasto. A partir de aquí, se concluye que $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$, $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = \frac{m^2}{24p_1p_2}$, y, por otra parte, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = \frac{m}{\sqrt{6}}$, $e(\mathbf{p}^1, u^0) = \sqrt{6}m$ y $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$. Por lo tanto,

$$VCR = e(\mathbf{p}^1, u^0) - e(\mathbf{p}^0, u^0) = \left(\sqrt{6} - 1\right) m, \tag{22}$$

$$VER = e(\mathbf{p}^1, u^1) - e(\mathbf{p}^0, u^1) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) m, \tag{23}$$

mientras que la expresión de la VEC, $VEC = \int_{p_1}^{2p_1} q_1^{\mathrm{m}}(s_1, p_2, m)\mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{2p_2} q_2^{\mathrm{m}}(2p_1, s_2, m)\mathrm{d}s_2$ (o bien $VEC = \int_{p_2}^{2p_2} q_2^{\mathrm{m}}(p_1, s_2, m)\mathrm{d}s_2 + \int_{p_1}^{2p_1} q_1^{\mathrm{m}}(s_1, 2p_2, m)\mathrm{d}s_1$), queda reducida a

$$VEC = \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{2s_1}\mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{3p_2} \frac{m}{2s_2}\mathrm{d}s_2 = \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} m, \tag{24}$$

dado que la demanda marshalliana de cada bien depende únicamente de su propio precio y no del precio del otro bien, $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_2} = 0 = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_1}$.

Nótese que la existencia de efectos renta conduce a que las medidas de bienestar (22), (23) y (24) ofrezcan resultados diferentes.

Por otra parte, cuando las preferencias son de tipo Leontief como las descritas en el enunciado, las demandas marshallianas y hicksianas, así como la función de utilidad indirecta y la de gasto que resultan, están definidas por[25]

$$(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)) = \left(\frac{m}{p_1 + p_2}, \frac{m}{p_1 + p_2}\right),$$

$$\left(q_1^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u), q_2^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u)\right) = (u, u)\,,$$

$$v(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

y

$$e(\mathbf{p}, u) = (p_1 + p_2)\, u,$$

respectivamente. Utilizando la función de utilidad indirecta, la VCR es el nivel de renta que verifica la condición

$$v(p_1, p_2, m) = v(2p_1, 3p_2, m + VCR),$$

condición que, teniendo en cuenta la expresión de la función de utilidad indirecta, deviene en

$$\frac{m}{p_1 + p_2} = \frac{m + VCR}{2p_1 + 3p_2}$$

y resolviendo esta ecuación se llega a

$$VCR = \frac{p_1 + 2p_2}{p_1 + p_2} m. \tag{25}$$

A su vez, la VER es la cuantía de renta que satisface la condición

$$v(p_1, p_2, m - VER) = v(2p_1, 3p_2, m),$$

esto es,

$$\frac{m - VER}{p_1 + p_2} = \frac{m}{2p_1 + 3p_2},$$

[25] Adáptense los resultados del apartado 2 del Ejercicio 1.8 para el caso particular en el que $\alpha = \beta = 1$.

de donde se deduce que

$$VER = \frac{p_1 + 2p_2}{2p_1 + 3p_2} m. \tag{26}$$

Finalmente, la VEC se obtiene como

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^0, m\right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 \\ &= \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{s_1 + p_2} \mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{3p_2} \frac{m}{2p_1 + s_2} \mathrm{d}s_2 \\ &= m \ln \frac{2p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2}, \end{aligned} \tag{27}$$

o, alternativamente, con otra senda de variación de precios distinta, como

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^0, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 + \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^1, m\right) \mathrm{d}p_1 \\ &= \int_{p_2}^{3p_2} \frac{m}{p_1 + s_2} \mathrm{d}s_2 + \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{s_1 + 3p_2} \mathrm{d}s_1 \\ &= m \ln \frac{2p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2}, \end{aligned} \tag{27a}$$

y la coincidencia de este resultado con el obtenido en (27) se debe a que $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} q_2^{\mathrm{m}}(\cdot) = \frac{m}{(p_1+p_2)^2} = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial m} q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)$, con lo cual $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_2} = \frac{m}{(p_1+p_2)^2} = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_1}$, ya que el efecto sustitución es nulo, $\frac{\partial q_1^{\mathrm{h}}(\cdot)}{\partial p_2} = 0 = \frac{\partial q_2^{\mathrm{h}}(\cdot)}{\partial p_1}$.[26]

Nótese que las medidas de bienestar (25), (26) y (27)-(27a) ofrecen resultados distintos, lo cual es debido a la existencia de efectos renta en las demandas de los bienes.

Por último, en el caso de las preferencias lineales, las demandas marshallianas resultantes son

$$\left(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)\right) = \begin{cases} \left(0, \frac{m}{p_2}\right), \text{ si } p_1 > p_2 \\ \left(\left[0, \frac{m}{p_1}\right], \left[0, \frac{m}{p_2}\right]\right), \text{ si } p_1 = p_2 \\ \left(\frac{m}{p_1}, 0\right), \text{ si } p_1 < p_2, \end{cases}$$

y la correspondiente función de utilidad indirecta es

$$v(\mathbf{p}, m) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{p_2}, \text{ si } p_1 > p_2 \\ \frac{m}{p_1}, \text{ si } p_1 < p_2 \end{array} \right\} = \max\left\{\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}\right\} m.$$

[26] Véase el Ejercicio 3.4.

A partir de aquí y definiendo la VCR como el valor que satisface la condición

$$v(p_1, p_2, m) = v(2p_1, 3p_2, m + VCR), \tag{28}$$

es necesario diferenciar tres posibles escenarios en el incremento de precios desde los valores iniciales dados por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ hasta los valores finales dados por el vector $\mathbf{p}^1 = (2p_1, 3p_2)$ para calcular dicha VCR:[27]

(a) Si $p_1 > p_2$ y $2p_1 > 3p_2$, la condición (28) se escribe como $\frac{m}{p_2} = \frac{m+VCR}{3p_2}$, con lo cual $VCR = 2m$.

(b) Si $p_1 > p_2$ y $2p_1 < 3p_2$, la condición (28) se convierte en $\frac{m}{p_2} = \frac{m+VCR}{2p_1}$, a partir de la cual se obtiene $VCR = \frac{2p_1 - p_2}{p_2}m$.

(c) Si $p_1 < p_2$ (con lo cual $2p_1 < 3p_2$), la condición (28) se expresa como $\frac{m}{p_1} = \frac{m+VCR}{2p_1}$, la cual, una vez resuelta, da lugar a $VCR = m$.

Teniendo en cuenta (a), (b) y (c), se concluye que

$$VCR = \begin{cases} 2m, \text{ si } p_1 > p_2 \text{ y } 2p_1 > 3p_2 \\ \frac{2p_1 - p_2}{p_2}m, \text{ si } p_1 > p_2 \text{ y } 2p_1 < 3p_2 \\ m, \text{ si } p_1 < p_2. \end{cases} \tag{29}$$

El razonamiento para calcular la VER es análogo al utilizado anteriormente. A partir de la condición

$$v(p_1, p_2, m - VER) = v(2p_1, 3p_2, m) \tag{30}$$

se obtiene:

(a) Si $p_1 > p_2$ y $2p_1 > 3p_2$, la condición (30) se expresa como $\frac{m-VER}{p_2} = \frac{m}{3p_2}$, con lo cual $VER = \frac{2}{3}m$.

(b) Si $p_1 > p_2$ y $2p_1 < 3p_2$, la condición (30) se convierte en $\frac{m-VER}{p_2} = \frac{m}{2p_1}$, a partir de la cual se obtiene $VER = \frac{2p_1 - p_2}{2p_1}m$.

(c) Si $p_1 < p_2$ (con lo cual $2p_1 < 3p_2$), la condición (30) se particulariza en $\frac{m-VER}{p_1} = \frac{m}{2p_1}$, con lo cual $VER = \frac{m}{2}$.

En definitiva, resumiendo todos los casos posibles de valores de los precios de los bienes 1 y 2 tenemos como variación equivalente de la renta

$$VER = \begin{cases} \frac{2}{3}m, \text{ si } p_1 > p_2 \text{ y } 2p_1 > 3p_2 \\ \\ \frac{2p_1 - p_2}{2p_1}m, \text{ si } p_1 > p_2 \text{ y } 2p_1 < 3p_2 \\ \\ \frac{1}{2}m, \text{ si } p_1 < p_2. \end{cases} \tag{31}$$

[27] No consideramos las situaciones en las que los precios de ambos bienes sean iguales, ni en la situación inicial, $p_1 = p_2$, ni tampoco en la situación final, $2p_1 = p_2$, porque en esos casos tendríamos correspondencias (y no funciones) de demanda marshalliana.

Por último, la VEC se determina de la siguiente manera:

(a) Si $p_1 > p_2$ y $2p_1 > 3p_2$, entonces $VEC = \int_{p_2}^{3p_2} \frac{m}{s_2} \mathrm{d}s_2 = m \ln 3$.

(b) Si $p_1 > p_2$ y $2p_1 < 3p_2$, el consumidor, de adquirir el bien 2 en la situación inicial de precios, pasa a comprar el bien 1 en la situación final. Entonces

$$\begin{aligned} VEC &= \overbrace{\int_{p_2}^{p_2^*=p_1} \frac{m}{s_2}\mathrm{d}s_2 + \int_{p_2^*=p_1}^{3p_2} 0 \cdot \mathrm{d}s_2}^{p_1^0=p_1} + \underbrace{\int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{s_1}\mathrm{d}s_1}_{p_2^1=3p_2} \\ &= m \ln \frac{2p_1}{p_2}, \end{aligned} \tag{32}$$

donde en la tercera integral se tiene en cuenta que $p_1 < 3p_2$. [Por ejemplo, si $\mathbf{p}^0 = (4, 3)$ y $\mathbf{p}^1 = (8, 9)$, con lo cual $\mathbf{q}^0 = \left(0, \frac{m}{p_2}\right)$ y $\mathbf{q}^1 = \left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$, tendríamos, suponiendo $p_1 = 4$, que

$$VEC = \int_3^4 \frac{m}{p_2}\mathrm{d}p_2 + \int_4^9 0 \cdot \mathrm{d}p_2 + \tag{33}$$

y dado que ahora tendríamos $p_2 = 9$, en cuyo caso el equilibrio es $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$ tanto a precios $(4, 9)$ como a precios $(8, 9)$, es claro que a la expresión (33) es preciso sumarle

$$+ \int_4^8 \frac{m}{p_1}\mathrm{d}p_1, \tag{34}$$

y teniendo en cuenta (33) y (34) llegamos a

$$VEC = m \ln \frac{8}{3}.]$$

[Y si hubiésemos elegido otra senda de variación de precios, tendríamos

$$VEC = \overbrace{\int_{p_1}^{2p_1} 0 \cdot \mathrm{d}s_1}^{p_2^0=p_2} + \underbrace{\int_{p_2}^{p_2^*=2p_1} \frac{m}{s_2}\mathrm{d}s_2 + \int_{p_2^*=2p_1}^{3p_2} 0 \cdot \mathrm{d}s_2}_{p_1^1=2p_1} = m \ln \frac{2p_1}{p_2} \tag{32a}$$

y donde en la primera integral se tiene en cuenta el hecho de que $p_2 < 2p_1$.]

(c) Finalmente, si $p_1 < p_2$, se llega a que $VEC = \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{s_1}\mathrm{d}s_1 = m \ln 2$.

En definitiva, considerando los casos (a), (b) y (c), tenemos que la reducción de bienestar en términos de VEC es la dada por

$$VEC = \begin{cases} m \ln 3, \text{ si } p_1 > p_2 \text{ y } 2p_1 > 3p_2 \\ m \ln \frac{4p_1}{p_2}, \text{ si } p_1 > p_2 \text{ y } 2p_1 < 3p_2 \\ m \ln 2, \text{ si } p_1 < p_2. \end{cases} \tag{35}$$

Comparando (29), (31) y (35), se constata como la evaluación del cambio en el bienestar es distinta según la medida utilizada.

2. Ahora se trata de una reducción en los precios de los bienes. Como siempre, la VCR se obtiene a partir de la condición

$$v(p_1, p_2, m) = v\left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{3}, m - VCR\right),$$

condición que, en el caso de las preferencias Cobb-Douglas, se particulariza en

$$\frac{m^2}{4p_1p_2} = \frac{(m - VCR)^2}{\frac{p_1}{2}\frac{p_2}{3}},$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta, tenemos que $VCR = m \pm \frac{\sqrt{6}}{6}m$. Por último, para determinar con cual de estas soluciones se corresponde el verdadero valor de la VCR, basta tener en cuenta que $m - VCR \geq 0$. Por lo tanto,

$$VCR = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)m. \tag{36}$$

La VER se obtiene de la condición

$$v(p_1, p_2, m + VER) = v\left(\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{3}, m\right),$$

expresión que, dada la función de utilidad indirecta existente, deviene en

$$\frac{(m + VER)^2}{4p_1p_2} = \frac{m^2}{\frac{p_1}{2}\frac{p_2}{3}},$$

y cuyas soluciones son $VER = -m \pm \sqrt{6}m$. Finalmente, dado que se debe verificar que $VER > 0$, la verdadera solución es

$$VER = \left(\sqrt{6} - 1\right)m. \tag{37}$$

Por último, y dado que la demanda de cada bien depende únicamente de su propio precio, la expresión de la VEC, $VEC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^0, m\right)\mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^1}^{p_2^0} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right)\mathrm{d}p_2$,[28] se reduce a

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{\frac{p_1}{2}}^{p_1} \frac{m}{2s_1}\mathrm{d}s_1 + \int_{\frac{p_2}{3}}^{p_2} \frac{m}{2s_2}\mathrm{d}s_2 \\ &= m\frac{\ln 2 + \ln 3}{2}, \end{aligned} \tag{38}$$

[28] U otra alternativa, si seguimos otra senda de variación de precios distinta.

y que es la cantidad en la que aumenta el bienestar del individuo.

En el caso de las preferencias Leontief, la reducción de precios provoca un incremento de bienestar del individuo que, si lo medimos por la VCR, para lo cual utilizamos la condición

$$\frac{m}{p_1+p_2}=\frac{m-VCR}{\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{3}},$$

resulta

$$VCR=\frac{3p_1+4p_2}{6\left(p_1+p_2\right)}m. \tag{39}$$

Por otra parte, la VER se determina a partir de la condición

$$\frac{m+VER}{p_1+p_2}=\frac{m}{\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{3}},$$

la cual da lugar a la solución

$$VER=\frac{3p_1+4p_2}{3p_1+2p_2}m. \tag{40}$$

Finalmente, la VEC es

$$\begin{aligned}
VEC &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1,p_2^0,m\right)\mathrm{d}p_1+\int_{p_2^1}^{p_2^0} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1,p_2,m\right)\mathrm{d}p_2\\
&= \int_{\frac{p_1}{2}}^{p_1}\frac{m}{s_1+p_2}\mathrm{d}s_1+\int_{\frac{p_2}{3}}^{p_2}\frac{m}{\frac{p_1}{2}+s_2}\mathrm{d}s_2\\
&= m\ln\frac{6\left(p_1+p_2\right)}{3p_1+2p_2},
\end{aligned} \tag{41}$$

si tomamos la senda de variación de precios reflejada en (41) o, alternativamente,

$$\begin{aligned}
VEC &= \int_{p_2^1}^{p_2^0} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^0,p_2,m\right)\mathrm{d}p_2+\int_{p_1^1}^{p_1^0} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1,p_2^1,m\right)\mathrm{d}p_1\\
&= \int_{\frac{p_2}{3}}^{p_2}\frac{m}{p_1+s_2}\mathrm{d}s_2+\int_{\frac{p_1}{2}}^{p_1}\frac{m}{s_1+\frac{p_2}{3}}\mathrm{d}s_1\\
&= m\ln\frac{6\left(p_1+p_2\right)}{3p_1+2p_2},
\end{aligned} \tag{41a}$$

si tomamos otra senda de variación de los precios.[29]

En el caso de las preferencias lineales, la VCR se calcula de la siguiente forma:

[29] La propiedad de independendencia de senda se satisface porque $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial p_2}=-\frac{m}{(p_1+p_2)^2}=\frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}$.

(a) Si $p_1 < p_2$ y $\frac{p_1}{2} < \frac{p_2}{3}$, la condición $\frac{m}{p_1} = \frac{m-VCR}{\frac{p_1}{2}}$ da lugar a $VCR = \frac{m}{2}$.

(b) Si $p_1 < p_2$ y $\frac{p_1}{2} > \frac{p_2}{3}$, la condición $\frac{m}{p_1} = \frac{m-VCR}{\frac{p_2}{3}}$ implica que $VCR = \frac{3p_1-p_2}{3p_1}m$.

(c) Si $p_1 > p_2$ (con lo cual $\frac{p_1}{2} > \frac{p_2}{3}$), la condición $\frac{m}{p_2} = \frac{m-VCR}{\frac{p_1}{2}}$ provoca que $VCR = \frac{2p_2-p_1}{2p_2}m$.

En resumen, teniendo en cuenta los casos (a), (b) y (c), establecemos el resultado

$$VCR = \begin{cases} \frac{1}{2}m, \text{ si } p_1 < p_2 \text{ y } \frac{p_1}{2} < \frac{p_2}{3} \\ \\ \frac{3p_1-p_2}{3p_1}m, \text{ si } p_1 < p_2 \text{ y } \frac{p_1}{2} > \frac{p_2}{3} \\ \\ \frac{2p_2-p_1}{2p_2}m, \text{ si } p_1 > p_2. \end{cases} \tag{42}$$

La VER se obtiene a partir del siguiente razonamiento:

(a) Si $p_1 < p_2$ y $\frac{p_1}{2} < \frac{p_2}{3}$, entonces la condición $\frac{m+VER}{p_1} = \frac{m}{\frac{p_1}{2}}$ da lugar a $VER = m$.

(b) Si $p_1 < p_2$ y $\frac{p_1}{2} > \frac{p_2}{3}$, la condición $\frac{m+VER}{p_1} = \frac{m}{\frac{p_2}{3}}$ desemboca en $VER = \frac{3p_1-p_2}{p_2}m$.

(c) Si $p_1 > p_2$, la condición $\frac{m+VER}{p_2} = \frac{m}{\frac{p_2}{3}}$ implica que $VER = 2m$.

En definitiva, considerando (a), (b) y (c),

$$VER = \begin{cases} m, \text{ si } p_1 < p_2 \text{ y } \frac{p_1}{2} < \frac{p_2}{3} \\ \frac{3p_1-p_2}{p_2}m, \text{ si } p_1 < p_2 \text{ y } \frac{p_1}{2} > \frac{p_2}{3} \\ 2m, \text{ si } p_1 > p_2. \end{cases} \tag{43}$$

La VEC se obtiene de la siguiente manera:

(a) Si $p_1 < p_2$ y $\frac{p_1}{2} < \frac{p_2}{3}$, entonces $VEC = \int_{\frac{p_1}{2}}^{p_1} \frac{m}{s_1}\mathrm{d}s_1 = m\ln 2$,

(b) Si $p_1 < p_2$ y $\frac{p_1}{2} > \frac{p_2}{3}$, el individuo consume el bien 1 en la situación inicial de precios de acuerdo con la función de demanda $q_1 = \frac{m}{p_1}$, y pasa a consumir el bien 2 en la situación final de precios de acuerdo con la función de demanda $q_2 = \frac{m}{\frac{p_2}{3}}$. Por lo tanto,

$$VEC = \overbrace{\int_{p_2^*=\frac{p_1}{2}}^{p_2} 0 \cdot \mathrm{d}s_2 + \int_{\frac{p_2}{3}}^{p_2^*=\frac{p_1}{2}} \frac{m}{s_2}\mathrm{d}s_2}^{p_1^0=p_1} + \underbrace{\int_{\frac{p_1}{2}}^{p_1} \frac{m}{s_1}\mathrm{d}s_1}_{p_2^1=\frac{p_2}{3}} = m\ln\frac{3p_1}{p_2}. \tag{44}$$

[Si consideramos otra senda de variación de precios, entonces

$$VEC = \overbrace{\int_{\frac{p_1}{2}}^{p_1} \frac{m}{s_1}\mathrm{d}s_1}^{p_2^0=p_2} + \underbrace{\int_{p_2^*=\frac{p_1}{2}}^{p_2} 0 \cdot \mathrm{d}s_2 + \int_{\frac{p_2}{3}}^{p_2^*=\frac{p_1}{2}} \frac{m}{s_2}\mathrm{d}s_2}_{p_1^1=\frac{p_1}{2}} = m\ln\frac{3p_1}{p_2} \tag{44a}$$

y el resultado es el mismo que el reflejado en (44).]

(c) Finalmente, si $p_1 > p_2$, se obtiene $VEC = \int_{\frac{p_2}{3}}^{p_2} \frac{m}{s_2} \mathrm{d}s_2 = m \ln 3$.

Resumiendo los apartados (a), (b) y (c), se llega a la conclusión de que la medida VEC de incremento de bienestar es igual a

$$VEC = \begin{cases} m \ln 2, \text{ si } p_1 < p_2 \text{ y } \frac{p_1}{2} < \frac{p_2}{3} \\ m \ln \frac{3p_1}{p_2}, \text{ si } p_1 < p_2 \text{ y } \frac{p_1}{2} > \frac{p_2}{3} \\ m \ln 3, \text{ si } p_1 > p_2, \end{cases} \tag{45}$$

y, una vez más, las medidas dadas en (42), (43) y (45) no coinciden. ■

Ejercicio 3.8

Consideremos un individuo inmerso en una economía en la que existen J bienes de consumo, $j = 1, ..., J$. Dado que queremos analizar el comportamiento de este individuo respecto a los bienes 1 y 2 únicamente, agrupemos los restantes bienes de la economía, $j = 3, ..., J$, en el bien 0. Los precios de los bienes 1 y 2, p_1 y p_2, respectivamente, se expresan en unidades del bien 0, lo mismo que la renta del consumidor, m, de tal manera que $p_0 = 1$ (bien numerario). Supongamos, por último, que el orden de preferencias del individuo es el representado por la función de utilidad cuasilineal $u(q_1, q_2, q_0) = q_1^{\frac{1}{4}} q_2^{\frac{1}{4}} + q_0$.[30] En estas condiciones:

1. Si en una situación inicial los precios de los bienes son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ y en una situación final pasan a ser los dados por $\mathbf{p}^1 = (2p_1, p_2)$, calcular la variación de bienestar que experimenta el consumidor.

2. Si en una situación inicial los precios de los bienes son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ y en una situación final pasan a ser los dados por $\mathbf{p}^1 = (2p_1, 2p_2)$, calcular la variación de bienestar del consumidor.

3. ¿Qué sucede con el bienestar del consumidor en el contexto del apartado 2 cuando, simultáneamente al incremento de precios, su renta aumenta el 100% entre la situación final y la inicial?

Resolución

En este caso tenemos una situación en la que $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ (es decir, $\alpha + \beta < 1$). En consecuencia, la función de subutilidad $q_1^{\alpha} q_2^{\beta}$ es cóncava (y, por lo tanto, cuasicóncava), mientras que la función

[30] Este ejercicio trata de ejemplificar el caso en el que los parámetros α y β adoptan valores estrictamente positivos y tales que verifican la condición $\alpha + \beta < 1$, mientras que en el Ejercicio 3.9 analizamos el caso en el que α y β son estrictamente positivos y tales que $\alpha + \beta > 1$. Diferenciamos ambos casos porque los equilibrios son muy distintos en uno y otro. (Véanse los Ejercicios 1.12 y 1.13.)

de utilidad $q_1^\alpha q_2^\beta + q_0$ es cuasicóncava. El problema consistente en $MAX_{(q_1,q_2,q_0)}\ q_1^{\frac{1}{4}} q_2^{\frac{1}{4}} + q_0$, s.a: $p_1 q_1 + p_2 q_2 \leq m$ tiene como solución[31]

$$(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}, q_0^{\mathrm{m}}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{16\sqrt{p_1^3 p_2}}, \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2^3}}, m - \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}\right), \text{ si } m > \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}} \\ \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}, 0\right), \text{ si } m \leq \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}. \end{cases} \tag{46}$$

Es decir, tenemos un equilibrio interior del tipo $(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}, q_0^{\mathrm{m}}) \gg \mathbf{0}$ y un equilibrio de esquina de la forma $(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}, 0)$. La existencia de estos dos tipos de equilibrio se justifica de la siguiente manera: cuando $\alpha + \beta < 1$ como sucede en este caso, la intensidad de las preferencias en q_1 y q_2 es suficientemente baja con relación a la intensidad de las preferencias en q_0 (preferencias suficientemente simétricas) como para que, en determinadas situaciones,[32] ocurran las intersecciones necesarias entre los ratios de utilidades marginales de los bienes y los ratios de los correspondientes precios que definen equilibrio interior.[33]

Obsérvese que debido a la cuasilinealidad de las preferencias, en el equilibrio interior las demandas marshallianas de los bienes 1 y 2 no dependen de la renta, con lo cual ninguna de ellas presentará efecto renta, al ser éstos totalmente absorbidos por la demanda del bien numerario.

A partir de (46) la utilidad indirecta que obtiene el individuo es

$$v(\mathbf{p}, m) = \begin{cases} m + \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}, \text{ si } m > \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}} \\ \frac{m^2}{4p_1 p_2}, \text{ si } m \leq \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}. \end{cases} \tag{47}$$

Por otra parte, el equilibrio, en términos de demandas hicksianas, es el par dado por[34]

$$\left(q_1^{\mathrm{h}}, q_2^{\mathrm{h}}, q_0^{\mathrm{h}}\right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{16\sqrt{p_1^3 p_2}}, \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2^3}}, u - \frac{1}{4\sqrt{p_1 p_2}}\right), \text{ si } u > \frac{1}{4\sqrt{p_1 p_2}} \\ \left(\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} u^2, \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} u^2, 0\right), \text{ si } u \leq \frac{1}{4\sqrt{p_1 p_2}}, \end{cases} \tag{48}$$

solución que se obtiene resolviendo el problema $MIN_{(q_1,q_2,q_0)}\ p_1 q_1 + p_2 q_2 + q_0$, s.a: $u \geq q_1^{\frac{1}{4}} q_2^{\frac{1}{4}} + q_0$, problema que, debido a que la función de subutilidad $q_1^{\frac{1}{4}} q_2^{\frac{1}{4}}$ es cóncava, es equivalente al problema no condicionado $MIN_{(q_1,q_2)}\ p_1 q_1 + p_2 q_2 + u - q_1^{\frac{1}{4}} q_2^{\frac{1}{4}}$.[35] Del equilibrio dado en (48) o, alternativamente, de la inversión de la función de utilidad indirecta (47), se obtiene

$$e(\mathbf{p}, u) = \begin{cases} u - \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}, \text{ si } u > \frac{1}{4\sqrt{p_1 p_2}} \\ 2\sqrt{p_1 p_2 u}, \text{ si } u \leq \frac{1}{4\sqrt{p_1 p_2}} \end{cases} \tag{49}$$

como función de gasto.

[31] Basta con particularizar el resultado del Ejercicio 1.12 reflejado en las expresiones (45)-(46) al caso en el que $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.

[32] Concretamente, cuando la renta del individuo, m, es suficientemente elevada.

[33] Lo cual no ocurre cuando los parámetros α y β son estrictamente positivos y tales que $\alpha + \beta > 1$.

[34] Evalúense las expresiones (51)-(52) del Ejercicio 1.12 para el caso en el que $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.

[35] Obsérvese como en el equilibrio interior las demandas hicksianas de los bienes 1 y 2 coinciden, en efecto, con las marshallianas.

1. Para evaluar la variación de bienestar, es preciso tener en cuenta que en el paso de la situación caracterizada por los precios $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ a la situación caracterizada por los precios $\mathbf{p}^1 = (2p_1, p_2)$ son posibles tres escenarios a la vista de las demandas marshallianas que configuran el equilibrio dado en (46):

   (a) Si la renta del consumidor y los precios de los bienes son tales que $m > \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}$ (individuo rico), el equilibrio es interior tanto en la situación inicial como en la final. En este caso, resulta $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = m + \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}$ y $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}}$. A su vez, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = u^0 - \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = u^1 - \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = u^1 - \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}} = m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} - \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = u^0 - \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} = m + \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}} - \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}}$. Con ello,

$$VCR = m + \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}} - \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} - m = \frac{\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2p_1p_2}} \tag{50}$$

   y

$$VER = m - m - \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} + \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2p_1p_2}}, \tag{51}$$

   mientras que

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^0, m\right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 \\ &= \int_{p_1}^{2p_1} \frac{1}{16\sqrt{s_1^3 p_2}} \mathrm{d}s_1 + 0 \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2p_1p_2}}, \end{aligned} \tag{52}$$

   o, alternativamente, $VEC = \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right)\mathrm{d}p_2 + \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^1, m\right)\mathrm{d}p_1$, si bien esta expresión produce el resultado ofrecido en (52), dado que $p_2^1 = p_2^0$.

   (b) Si $\frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} < m \leq \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}$ (individuo moderadamente rico), el equilibrio inicial es de esquina y el final es interior. En este caso, resulta $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ y $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}}$. A su vez, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = 2\sqrt{p_1p_2\frac{m^2}{4p_1p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} - \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = 2\sqrt{p_1p_2\left(m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}}\right)}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = \frac{m^2}{4p_1p_2} - \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}}$. Con ello se obtiene

$$VCR = \frac{m^2}{4p_1p_2} - \frac{1}{8\sqrt{2p_1p_2}} - m, \tag{53}$$

$$VER = m - 2\sqrt{p_1 p_2 \left(m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1 p_2}}\right)} \tag{54}$$

y

$$\begin{aligned} VEC &= \overbrace{\int_{p_1}^{p_1^* = \frac{1}{64 p_2 m^2}} \frac{m}{2s_1} \mathrm{d}s_1 + \int_{p_1^* = \frac{1}{64 p_2 m^2}}^{2p_1} \frac{1}{16\sqrt{s_1^3 p_2}} \mathrm{d}s_1}^{p_2^0 = p_2} \\ &= \frac{1}{64 m \sqrt{p_1 p_2}} - \frac{1}{8\sqrt{2p_1 p_2}} - m \ln 64 p_1 p_2 m, \end{aligned} \tag{55}$$

(c) Si $m \leq \frac{1}{8\sqrt{2p_1 p_2}}$ (individuo pobre), el equilibrio es de esquina en todas las situaciones de precios. En este caso se tiene que $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = \frac{m^2}{4p_1 p_2}$ y $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = \frac{m^2}{8p_1 p_2}$. Por su parte, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = 2\sqrt{p_1 p_2 \frac{m^2}{4p_1 p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = 2\sqrt{2p_1 p_2 \frac{m^2}{8p_1 p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = 2\sqrt{p_1 p_2 \frac{m^2}{8p_1 p_2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 2\sqrt{2p_1 p_2 \frac{m^2}{4p_1 p_2}} = \sqrt{2}m$. Con ello,

$$VCR = \frac{2m}{\sqrt{2}} - m = \left(\sqrt{2} - 1\right) m, \tag{56}$$

$$VER = m - \frac{m}{\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) m \tag{57}$$

y

$$VEC = \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{2s_1} \mathrm{d}s_1 = m \frac{\ln 2}{2}. \tag{58}$$

Tanto en (b) como en (c) existen efectos renta en las demandas de bienes, lo que explica que las medidas de bienestar ofrezcan resultados dispares.

2. Para cuantificar monetariamente la variación de bienestar cuando se modifican varios precios como en este caso, es necesario tener en cuenta dos aspectos. En primer lugar, que las demandas marshallianas de los bienes 1 y 2 satisfacen la condición $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)}{\partial p_1}$, con lo cual la VEC es independiente de la trayectoria o senda de precios que utilicemos en la integración de las demandas marshallianas. En segundo lugar, que en el paso de la situación caracterizada por $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ a la situación caracterizada por $\mathbf{p}^1 = (2p_1, 2p_2)$ volvemos a tener tres posibles escenarios:

   (a) Si la renta del consumidor es tal que $m > \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}$, su equilibrio, tanto el inicial como el final, es interior. En este caso, resulta $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = m + \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}$ y $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1 2p_2}} = m + \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}}$. A su vez, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = u^0 - \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}} =$

m, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = u^1 - \frac{1}{8\sqrt{2p_1 2p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = u^1 - \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}} = m - \frac{1}{8\sqrt{2p_1 2p_2}}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = u^0 - \frac{1}{8\sqrt{2p_1 2p_2}} = m + \frac{1}{16\sqrt{2p_1 2p_2}}$. Con ello, la reducción de bienestar del consumidor es

$$VCR = m + \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}} - m = \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}} \tag{59}$$

y

$$VER = m - \left(m - \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}}\right) = \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}}. \tag{60}$$

Para calcular la VEC es conveniente tener en cuenta que se satisface la propiedad de independencia de senda, ya que la función de utilidad es cuasilineal.[36] En consecuencia, esta medida de bienestar se calcula como

$$\begin{aligned} VEC &= \frac{v(\mathbf{p}^1, m) - v(\mathbf{p}^0, m)}{\lambda(\mathbf{p}, m)} \\ &= m + \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}} - \left(m + \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}\right) \\ &= \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}}. \end{aligned} \tag{61}$$

[La medida de bienestar VEC obtenida en (61) también se habría podido calcular como

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^0, m\right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 \\ &= \int_{p_1}^{2p_1} \frac{1}{16\sqrt{s_1^3 p_2}} \mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{2p_2} \frac{1}{16\sqrt{2p_1 s_2^3}} \mathrm{d}s_2 \\ &= \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}} \end{aligned} \tag{61a}$$

o bien como

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}\left(p_1^0, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 + \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^1, m\right) \mathrm{d}p_1 \\ &= \int_{p_2}^{2p_2} \frac{1}{16\sqrt{p_1 s_2^3}} \mathrm{d}s_2 + \int_{p_1}^{2p_1} \frac{1}{16\sqrt{s_1^3 2p_2}} \mathrm{d}s_1 \\ &= \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}}, \end{aligned} \tag{61b}$$

[36] Véase Antelo (2000).

eligiendo otra senda de variación de los precios diferente. Naturalmente, tanto en (61a) como en (61b) se llega al mismo resultado que en (61).]

La coincidencia de estas tres valoraciones del cambio en el bienestar proviene de la forma cuasilineal de las preferencias (en los bienes 1 y 2) y del hecho de tener equilibrio interior, en cuyo caso desaparecen los efectos renta. Lo que viene a decir el resultado alcanzado en (59), (60) o (61) es que si los precios de todos los bienes distintos del numerario aumentan el 100%, la forma de mantener inalterado el nivel de bienestar del consumidor es aumentar su renta en la cuantía $\frac{1}{16\sqrt{p_1p_2}}$, la cual es inferior al 100% de la renta inicial (en consonancia con el hecho de que la tasa de inflación de todos los bienes de la economía, incluído el bien numerario cuyo precio no ha variado, es inferior al 100%).[37]

(b) Si la renta del consumidor verifica $\frac{1}{16\sqrt{p_1p_2}} < m \leq \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}$, su equilibrio inicial es de esquina, mientras que su equilibrio final es interior. En este caso, resulta $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ y $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = m + \frac{1}{8\sqrt{2p_12p_2}}$. A su vez, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = 2\sqrt{p_1p_2\frac{m^2}{4p_1p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = u^1 - \frac{1}{8\sqrt{2p_12p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = 2\sqrt{p_1p_2\left(m + \frac{1}{16\sqrt{p_1p_2}}\right)}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = u^0 - \frac{1}{8\sqrt{2p_12p_2}} = \frac{m^2}{4p_1p_2} - \frac{1}{16\sqrt{p_1p_2}}$. Por lo tanto, la reducción en el bienestar del consumidor es igual a

$$VCR = \frac{m^2}{4p_1p_2} - \frac{1}{16\sqrt{p_1p_2}} - m, \tag{62}$$

$$VER = m - 2\sqrt{p_1p_2\left(m + \frac{1}{16\sqrt{p_1p_2}}\right)} \tag{63}$$

y

$$\begin{aligned} VEC &= \overbrace{\int_{p_1}^{p_1^*=\frac{1}{256p_2m^2}} \frac{m}{2s_1}\mathrm{d}s_1 + \int_{p_1^*=\frac{1}{256p_2m^2}}^{2p_1} \frac{1}{16\sqrt{s_1^3p_2}}\mathrm{d}s_1}^{p_2^0=p_2} \\ &\quad \underbrace{+\int_{p_2}^{p_2^*=\frac{1}{128p_1m^2}} \frac{m}{2s_2}\mathrm{d}s_2 + \int_{p_2^*=\frac{1}{128p_1m^2}}^{2p_2} \frac{1}{16\sqrt{2p_1s_2^3}}\mathrm{d}s_2}_{p_1^1=2p_1} \\ &= \frac{p_1+p_2}{128p_1p_2m} - \frac{2+\sqrt{2}}{16\sqrt{2p_1p_2}} - m\left(\frac{15}{2}\ln 2 + \ln p_1p_2 + 2\ln m\right). \end{aligned} \tag{64}$$

Nótese que a pesar de tener preferencias cuasilineales, las medidas de variación del bienestar no coinciden en este caso. La explicación radica en que alguna de las situaciones de equilibrio es un equilibrio de esquina y, en consecuencia, las demandas marshallianas no están libres de efecto renta.

[37] Nótese que $m > 8p_1p_2 > 3p_1p_2$.

(c) Si $m \leq \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}}$, el equilibrio es de esquina, tanto en la situación inicial como en la final. En este caso se tiene que $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ y $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = \frac{m^2}{16p_1p_2}$. Por su parte, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = 2\sqrt{p_1p_2\frac{m^2}{4p_1p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = 2\sqrt{2p_12p_2\frac{m^2}{16p_1p_2}} = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = 2\sqrt{p_1p_2\frac{m^2}{16p_1p_2}} = \frac{m}{2}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 2\sqrt{2p_12p_2\frac{m^2}{4p_1p_2}} = 2m$. Con ello, el empeoramiento del bienestar del consumidor es igual a

$$VCR = 2m - m = m, \tag{65}$$

$$VER = m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} \tag{66}$$

y, finalmente,

$$VEC = \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{2s_1} \mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{2p_2} \frac{m}{2s_2} \mathrm{d}s_2 = m \ln 2. \tag{67}$$

Ahora, y al igual que sucede en el apartado (b), las diferentes valoraciones monetarias del bienestar tampoco coinciden pese a tener preferencias cuasilineales, porque estamos situados en equilibrios de esquina, con lo cual las demandas marshallianas de los bienes presentan efectos renta.

3. En este caso es necesario efectuar también un análisis por regiones:

(a) Para que exista equilibrio interior tanto en la situación final de precios como en la inicial, ha de ocurrir que $m > \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}$ (individuo rico). Supongamos que, en general, la renta del individuo en la situación inicial es $m = \frac{\alpha}{8\sqrt{p_1p_2}}$, siendo $\alpha > 1$. Entonces su utilidad (máxima) inicial es $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = m + \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}$, mientras que su utilidad (máxima) en la situación final, con una renta βm, $\beta > 1$, es $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = \beta m + \frac{1}{8\sqrt{2p_12p_2}}$. Y

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \beta m + \frac{1}{8\sqrt{2p_12p_2}} \gtreqless \frac{\alpha}{8\sqrt{p_1p_2}} + \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}, \tag{68}$$

es decir,

$$\beta \gtreqless \frac{2\alpha + 1}{16m\sqrt{p_1p_2}}.$$

Dado que $m = \frac{\alpha}{8\sqrt{p_1p_2}}$, el resultado es $\beta \gtreqless \frac{2\alpha+1}{2\alpha}$ (< 2), ya que $\alpha > 1$. Es decir, siempre que la renta del individuo sea suficientemente alta, en el sentido de $m > \frac{1}{8\sqrt{p_1p_2}}$, un incremento de la misma (entre la situación final y la inicial) en igual proporción que la tasa de inflación de los precios de los bienes 1 y 2, $\beta = 2$, no mantiene constante el nivel de bienestar del consumidor a lo largo del tiempo, sino que lo mejora. La explicación es que el individuo adquiere (en el equilibrio interior) cantidades del bien numerario y dado que su precio no ha variado, la tasa de inflación efectiva para dicho consumidor ha sido inferior al 100%. En este caso, el nivel de bienestar que obtiene el individuo en la situación inicial se mantiene en la situación final si aumentamos su renta en la cuantía $1 + \frac{1}{2\alpha}$.

(b) Si $\frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}} < m \leq \frac{1}{8\sqrt{p_1 p_2}}$ (individuo moderadamente rico), el equilibrio es de esquina en la situación inicial de precios y es interior en la situación final. Con ello se tiene que $u^0 = \frac{m^2}{4p_1 p_2}$, $u^1 = \beta m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1 2p_2}}$ y

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \beta m + \frac{1}{8\sqrt{2p_1 2p_2}} \gtreqless \frac{m^2}{4p_1 p_2}. \tag{69}$$

Teniendo en cuenta que la renta inicial es $m = \frac{\alpha}{8\sqrt{p_1 p_2}}$, con $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, y resolviendo (69) se llega a

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \beta \gtreqless \frac{4\alpha - 32\sqrt{p_1^3 p_2^3}}{64\alpha\sqrt{p_1^3 p_2^3}}. \tag{70}$$

Para determinar el valor de β se debe de tener en cuenta que $\beta > 0$, con lo cual α, p_1 y p_2 han de satisfacer las condiciones

$$4\alpha - 32\sqrt{p_1^3 p_2^3} > 0 \tag{71}$$

y

$$\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \tag{72}$$

Y es posible encontrar valores de α, p_1 y p_2 que satisfagan (71) y (72), y tales que $u^1 = u^0$ para $\beta \gtreqless 2$.

(c) Si $m \leq \frac{1}{16\sqrt{p_1 p_2}}$ (individuo pobre), el equilibrio del consumidor es siempre de esquina, con lo cual es inmediato deducir que

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \frac{(\beta m)^2}{16p_1 p_2} \gtreqless \frac{m^2}{4p_1 p_2}, \tag{73}$$

y la condición (73) equivale a

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \beta \gtreqless 2.$$

En este caso, el individuo mantiene el nivel de bienestar con un incremento del 100% de la renta. Ello es debido a que está especializado en el consumo de los bienes 1 y 2, por lo que la tasa de inflación existente es la tasa de inflación efectiva para él.

En definitiva, los procesos de inflación (y las cláusulas de revisión de las rentas que dichos procesos puedan implicar) no afectan por igual a todos los individuos, aunque todos ellos tengan las mismas preferencias hacia el consumo. El efecto final sobre el bienestar depende de la renta inicial de unos y otros, ya que dicho nivel de renta es lo que lleva a los individuos a estar situados en un tipo de equilibrio u otro. ■

Ejercicio 3.9

Consideremos un individuo que consume J bienes, $j = 1, ..., J$, y tiene preferencias del tipo $u(q_1, q_2, q_0) = q_1 q_2 + q_0$, donde el bien 0 agrupa a los bienes $3, ..., J$.[38] Sea $p_0 = 1$ el precio del bien numerario y $m > 0$ la renta del consumidor.

1. Consideremos una situación inicial en la que los precios de los bienes 1 y 2 son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ y una situación final en la que pasan a ser $\mathbf{p}^1 = (2p_1, p_2)$. Calcular la variación de bienestar que experimenta el consumidor.
2. Consideremos una situación inicial en la que los precios de los bienes 1 y 2 son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ y una situación final en la que pasan a ser $\mathbf{p}^1 = (2p_1, 2p_2)$. Calcular la variación de bienestar que experimenta el consumidor.
3. ¿Qué sucede con el nivel de bienestar del consumidor en el contexto del apartado 2 si su renta se incrementa en la misma proporción que la subida de precios de los bienes 1 y 2?

Resolución

En este caso tenemos una situación en la que $\alpha = \beta = 1$, con lo cual $\alpha + \beta > 1$. La consecuencia formal de estos valores de los parámetros α y β es que la función de subutilidad $q_1^\alpha q_2^\beta$ es convexa (y, por lo tanto, cuasicóncava) y no cóncava como sucedía cuando $\alpha + \beta < 1$ (véase el Ejercicio 3.8). La función de utilidad $q_1^\alpha q_2^\beta + q_0$ continúa siendo, sin embargo, cuasicóncava.

El sistema de demandas marshallianas del consumidor es el dado por[39]

$$(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}, q_0^{\mathrm{m}}) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}, 0\right), \text{ si } m > 4p_1p_2 \\ (0, 0, m), \text{ si } m \leq 4p_1p_2, \end{cases} \tag{74}$$

y a la vista de (74) la consecuencia económica que cabe extraer del hecho de que $\alpha + \beta > 1$ es que la intensidad de las preferencias en las cantidades consumidas de los bienes 1 y 2 es tan elevada con respecto a la intensidad de las preferencias en el bien 0 (preferencias asimétricas), que no se producen las igualdades entre las diferentes relaciones marginales de sustitución y los ratios de precios necesarias para que exista equilibrio interior, es decir, para que el consumidor compre una cantidad positiva de todos y cada uno de los bienes. De hecho, lo mejor que en este caso puede hacer —de cara a su utilidad— es colocar toda la renta que tiene en los bienes

[38] Este ejercicio trata de ejemplificar el caso en el que los parámetros adoptan valores tales que $\alpha + \beta > 1$.

[39] Véase el resultado del Ejercicio 1.13 en la expresión (55) y adáptese al caso en el que $\alpha = \beta = 1$.

1 y 2, y no en el bien 0 (cuando dicha renta es suficientemente elevada) o, por el contrario, gastar toda su renta en el bien 0 (cuando dicha renta es suficientemente baja, es decir, cuando no alcanza para adquirir los bienes 1 y 2) y no en el bien 1 ni en el 2.

A partir de (74), la función de utilidad indirecta que se obtiene es

$$v(\mathbf{p}, m) = \begin{cases} \frac{m^2}{4p_1p_2}, \text{ si } m > 4p_1p_2 \\ m, \text{ si } m \leq 4p_1p_2, \end{cases} \tag{75}$$

y dado que, por definición, se cumple que $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$, la función de gasto de este consumidor es

$$e(\mathbf{p}, u) = \begin{cases} 2\sqrt{p_1p_2u}, \text{ si } u > 4p_1p_2 \\ u, \text{ si } u \leq 4p_1p_2, \end{cases}$$

con lo cual, aplicando el lema de Shephard, según el cual $q_j^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_j}, j = 1, 2$, se deduce que $q_1^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u) = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}u}$, si $u > 4p_1p_2$, y $q_1^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u) = 0$, si $u \leq 4p_1p_2$. Análogamente, $q_2^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_2} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}u}$, si $u > 4p_1p_2$, y $q_2^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u) = 0$, si $u \leq 4p_1p_2$. Finalmente, y dada la restricción de utilidad $u = q_0^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u) + q_1^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u)q_2^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u)$, resulta que $q_0^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u) = 0$, si $u > 4p_1p_2$ y $q_0^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u) = u$, si $u \leq 4p_1p_2$. En resumen, las demandas hicksianas del consumidor son las dadas por

$$\left(q_1^{\mathrm{h}}, q_2^{\mathrm{h}}, q_0^{\mathrm{h}}\right) = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{p_2}{p_1}u}, \sqrt{\frac{p_1}{p_2}u}, 0\right), \text{ si } u > 4p_1p_2 \\ (0, 0, u), \text{ si } u \leq 4p_1p_2. \end{cases}$$

1. En el paso de la situación de precios caracterizada por $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ a la situación caracterizada por $\mathbf{p}^1 = (2p_1, p_2)$ son posibles tres escenarios:

   (a) Si $m > 8p_1p_2$, el equilibrio es siempre interior. En este caso, $u^0 = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ y $u^1 = \frac{m^2}{8p_1p_2}$, con lo cual $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = 2\sqrt{p_1p_2\frac{m^2}{8p_1p_2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$, $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 2\sqrt{2p_1p_2\frac{m^2}{4p_1p_2}} = \sqrt{2}m$ y $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$. Por lo tanto, el bienestar empeora en

$$VCR = \left(\sqrt{2} - 1\right) m, \tag{76}$$

$$VER = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) m \tag{77}$$

   y

$$VEC = \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{2s_1} \mathrm{d}s_1 = m\frac{\ln 2}{2}. \tag{78}$$

(b) Si $4p_1p_2 < m \leq 8p_1p_2$, el equilibrio es interior en la situación inicial y es de esquina en la situación final. En este caso, $u^0 = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ y $u^1 = m$, con lo cual $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = 2\sqrt{p_1p_2m}$, $e(\mathbf{p}^1, u^0) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$. Por lo tanto,

$$VCR = \frac{m^2}{4p_1p_2} - m, \tag{79}$$

$$VER = m - 2\sqrt{p_1p_2m} \tag{80}$$

y

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1}^{p_1^*=\frac{m}{4p_2}} \frac{m}{2s_1}\mathrm{d}s_1 + \int_{p_1^*=\frac{m}{4p_2}}^{2p_1} 0 \cdot \mathrm{d}s_1 \\ &= \frac{m}{2}\ln\frac{m}{4p_1p_2}, \end{aligned} \tag{81}$$

ya que la condición $m \gtrless 4p_1p_2$ es la que provoca el salto de un equilibrio interior a uno de esquina.

(c) Si $m \leq 4p_1p_2$, el equilibrio es de esquina en las dos situaciones, en cuyo caso $u^0 = m$ y $u^1 = m$. Por lo tanto, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = e(\mathbf{p}^0, u^1) = e(\mathbf{p}^1, u^0) = e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$, y

$$VCR = VER = VEC = 0.$$

2. Ahora, en el paso de la situación de precios caracterizada por $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ a la situación caracterizada por $\mathbf{p}^1 = (2p_1, 2p_2)$, son posibles los tres siguientes escenarios:

(a) Si la renta del consumidor y los precios de los bienes son tales que $m > 16p_1p_2$ (individuo rico), el equilibrio es del tipo $(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}, 0)$ tanto en la situación inicial como en la final, con lo cual

$$VCR = e(\mathbf{p}^1, u^0) - e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$$

o, alternativamente,

$$\frac{(m + VCR)^2}{16p_1p_2} = \frac{m^2}{4p_1p_2},$$

y de las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $VCR^2 + 2mVCR - 3m^2 = 0$, m y $-3m$, la solución factible es

$$VCR = m. \tag{82}$$

Por lo que respecta a la VER, se tiene que

$$\frac{m^2}{16p_1p_2} = \frac{(m - VER)^2}{4p_1p_2} \tag{83}$$

y resolviendo (83) se obtienen como soluciones, $\frac{3m}{2}$ y $\frac{m}{2}$, con lo cual

$$VER = \frac{m}{2}. \tag{84}$$

Por último, y dado que $q_2^{\mathrm{m}}(\cdot)$ no depende de p_1, ni tampoco $q_1^{\mathrm{m}}(\cdot)$ depende de p_2, la expresión de la VEC, $VEC = \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}(p_1, m)\mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2^{\mathrm{m}}(p_2, m)\mathrm{d}p_2$, se particulariza en

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{2s_1}\mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{2p_2} \frac{m}{2s_2}\mathrm{d}s_2 \\ &= m \ln 2. \end{aligned} \tag{85}$$

(b) Si la renta del consumidor y los precios de los bienes son tales que $4p_1p_2 < m \leq 16p_1p_2$ (individuo moderamente rico), el equilibrio inicial es del tipo $(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}, 0)$, mientras que el equilibrio final es del tipo $(0, 0, m)$. En este caso, $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ y $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = m$. Argumentando como en el caso anterior, se tiene que

$$m + VCR = \frac{m^2}{4p_1p_2},$$

de donde

$$VCR = \frac{m^2}{4p_1p_2} - m, \tag{86}$$

o, lo que es lo mismo, dado que $e(\mathbf{p}^0, u^0) = 2\sqrt{p_1p_2u^0} = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^0) = u^0 = \frac{m^2}{4p_1p_2}$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = 2\sqrt{p_1p_2u^1} = 2\sqrt{p_1p_2m}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^1) = u^1 = m$,

$$VCR = \frac{m^2}{4p_1p_2} - m.$$

Por otra parte, la VER se determina a partir de la condición

$$m = \frac{(m - VER)^2}{4p_1p_2},$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta, $VER^2 - 2mVER + (m^2 - 4p_1p_2m) = 0$, se obtienen $m \pm 2\sqrt{p_1p_2m}$ como soluciones, de las cuales el verdadero valor es

$$VER = m - 2\sqrt{p_1p_2m} \tag{87}$$

o, de forma alternativa,

$$VER = e(\mathbf{p}^1, u^1) - e(\mathbf{p}^0, u^1) = m - 2\sqrt{p_1p_2m}.$$

La VEC se obtiene como

$$\begin{aligned} VEC &= \overbrace{\int_{p_1}^{p_1^*=\frac{m}{4p_2}} \frac{m}{2s_1}\mathrm{d}s_1 + \int_{p_1^*=\frac{m}{4p_2}}^{2p_1} 0\cdot \mathrm{d}s_1}^{p_2^0=p_2} \\ &\quad \underbrace{+\int_{p_2}^{p_2^*=\frac{m}{8p_1}} \frac{m}{2s_2}\mathrm{d}s_2 + \int_{p_2^*=\frac{m}{8p_1}}^{2p_2} 0\cdot \mathrm{d}s_2}_{p_1^1=2p_1} \\ &= m\ln\frac{m}{8p_1p_2}. \end{aligned} \tag{88}$$

(c) Finalmente, si la renta del individuo y los precios de los bienes son tales que $m \leq 4p_1p_2$ (individuo pobre), entonces el equilibrio tanto en la situación final como en la inicial es del tipo $(0, 0, m)$, en cuyo caso $u^0 = u^1 = m$ y $e(\mathbf{p}^0, u^0) = e(\mathbf{p}^1, u^1) = e(\mathbf{p}^0, u^1) = e(\mathbf{p}^1, u^0) = u$. En consecuancia,

$$VCR = VER = VEC = 0. \tag{89}$$

En este caso, la inflación no afecta al bienestar del consumidor, ya que éste se especializa en el consumo de los bienes no afectados por la subida de precios (el bien numerario).

3. Tenemos que distinguir también cada uno de los tres intervalos en los que puede estar situado el nivel de renta del consumidor:

(a) Si $m > 16p_1p_2$ (individuo rico), el individuo se sitúa en un equilibrio interior tanto en la situación inicial de precios como en la final. Por lo tanto, $u^0 = \frac{m^2}{4p_1p_2}$ y $u^1 = \frac{m^2}{4p_1p_2}$, con lo cual si la renta final es βm, ocurrirá que

$$u^1 \gtreqqless u^0 \Leftrightarrow \frac{(\beta m)^2}{16p_1p_2} \gtreqqless \frac{m^2}{4p_1p_2},$$

condición que da lugar a

$$u^1 \gtreqqless u^0 \Leftrightarrow \beta \gtreqqless 2.$$

Por lo tanto, la indiciación de la renta a la subida de los precios de los bienes 1 y 2 mantiene el nivel de vida del consumidor.

(b) Si $4p_1p_2 < m \leq 16p_1p_2$ (individuo moderamente rico), el equilibrio inicial es interior, mientras que el final es de esquina. Luego si βm es la cuantía de renta en la situación final, se verifica que

$$u^1 \gtreqqless u^0 \Leftrightarrow \beta m \gtreqqless \frac{m^2}{4p_1p_2}$$

es decir,

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \beta \gtreqless \frac{m}{4p_1p_2} \tag{90}$$

y dado que $4p_1p_2 < m \leq 16p_1p_2$, la condición (90) se puede reescribir como

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \beta \gtreqless 1 + \alpha,$$

donde $\alpha \in (1, 3]$. Es decir, dependiendo de la cuantía exacta de la renta del consumidor en la situación inicial, el mantenimiento del nivel de vida cuando los bienes 1 y 2 se han encarecido el 200% puede requerir un aumento de dicha renta en un porcentaje que va desde el 100% (indiciación) hasta el 300% (sobreindiciación).

(c) Si $m < 4p_1p_2$ (individuo pobre), el equilibrio del consumidor es del tipo $(0, 0, m)$ tanto en la situación inicial como en la final, con lo cual

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \beta m \gtreqless m$$

esto es,

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \beta \gtreqless 1,$$

en cuyo caso el mantenimiento de la renta del individuo en su nivel inicial es suficiente para mantener constante su nivel de vida (por lo que un incremento del 100% de dicha renta duplica su nivel de bienestar). ■

Ejercicio 3.10

Sea $u(q_1, q_2) = \ln q_1 + q_2$ la función de utilidad que representa el orden de preferencias de un determinado consumidor que vive de consumir los bienes 1 y 2. La renta del citado consumidor es m y los precios a los que puede adquirir los bienes son los dados por el vector $\mathbf{p}^0 = \left(p_1^0, p_2^0\right) = (p_1, p_2)$.

1. Partiendo de esta situación inicial, calcular la variación en el bienestar de este individuo, si en una situación final los precios pasan a ser $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right) = (2p_1, p_2)$. ¿Qué incremento de renta del individuo conseguiría mantener su nivel de bienestar?

2. Contestar a lo mismo que en el apartado 1 si el sistema de precios en la situación final es $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right) = (p_1, 2p_2)$.

3. Contestar a las mismas cuestiones que en el apartado 1 si $\mathbf{p}^1 = \left(p_1^1, p_2^1\right) = (2p_1, 2p_2)$.

4. ¿Qué sucedería en 1, 2 y 3 si en lugar de la función de utilidad $u(\cdot)$ utilizásemos como función de utilidad una transformación monótona de $u(\cdot)$?

Resolución

Esta función de utilidad es cuasilineal, y las curvas de indiferencia a que da lugar se expresan como $q_2(q_1) = u - \ln q_1$. Dichas curvas son tales que $\lim\limits_{q_1 \to 0} q_2(q_1) = \infty$, $\lim\limits_{q_1 \to \infty} q_2(q_1) = -\infty$, $q_2'(q_1) < 0$ y $q_2''(q_1) > 0$. Es decir, se trata de curvas que "cortan" al eje q_1, son decrecientes y estrictamente convexas. De lo anterior se deduce que es posible la existencia de equilibrio tanto de carácter interior, del tipo $(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}) \gg \mathbf{0}$, como de esquina, del tipo $(q_1^{\mathrm{m}}, 0)$, ya que el bien 2 actúa como numerario. El conjunto de equilibrios, en términos de demandas marshallianas, del consumidor es el dado por

$$(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)) = \begin{cases} \left(\frac{p_2}{p_1}, \frac{m-p_2}{p_2}\right), \text{ si } m > p_2 \\ \left(\frac{m}{p_1}, 0\right), \text{ si } m \leq p_2. \end{cases} \tag{91}$$

Es inmediato verificar que, en el equilibrio interior, la demanda marshalliana del bien 1 carece de efecto renta, $\frac{\partial q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p},m)}{\partial m} \cdot q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m) = 0 \cdot q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)$, con lo cual dicha demanda ha de coincidir necesariamente con la demanda hicksiana del citado bien. A partir de (91), la función de utilidad indirecta que se obtiene es

$$v(\mathbf{p}, m) = \begin{cases} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m-p_2}{p_2}, \text{ si } m > p_2 \\ \ln \frac{m}{p_1}, \text{ si } m \leq p_2, \end{cases} \tag{92}$$

y se constata como en el equilibrio interior la utilidad marginal de la renta es, en efecto, constante (en el nivel de renta, se entiende), $\lambda(\mathbf{p}, m) = \frac{1}{p_2}$, o, lo que es lo mismo, la utilidad indirecta del consumidor es cuasilineal en la renta.

Las demandas hicksianas vienen dadas por el par de cantidades

$$\left(q_1^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u), q_2^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u)\right) = \begin{cases} \left(\frac{p_2}{p_1}, u - \ln \frac{p_2}{p_1}\right), \text{ si } u > \ln \frac{p_2}{p_1} \\ (\exp u, 0), \text{ si } u \leq \ln \frac{p_2}{p_1}, \end{cases} \tag{93}$$

a partir de las cuales la función de gasto que resulta es[40]

$$e(\mathbf{p}, u) = \begin{cases} p_2\left(u + 1 - \ln \frac{p_2}{p_1}\right), \text{ si } u > \ln \frac{p_2}{p_1} \\ p_1 \exp u, \text{ si } u \leq \ln \frac{p_2}{p_1}. \end{cases} \tag{94}$$

1. Si $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ son los precios de la situación inicial y $\mathbf{p}^1 = (2p_1, p_2)$ los de la situación final, entonces es necesario analizar tres posibles escenarios:

   (a) Si los valores de la renta y el precio del bien 2 son tales que $m > p_2$, el equilibrio es interior, tanto en la situación inicial como en la final. En este caso, $u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1$ y $u^1 = v(\mathbf{p}^1, m) = \ln \frac{p_2}{2p_1} + \frac{m}{p_2} - 1$. Por otra parte, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = p_2\left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m-p_2}{p_2} + 1 - \ln \frac{p_2}{p_1}\right) = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = p_2\left(\ln \frac{p_2}{2p_1} + \frac{m-p_2}{p_2} + 1 - \ln \frac{p_2}{2p_1}\right) =$

[40] La función de gasto también puede ser obtenida invirtiendo la función de utilidad indirecta dada en (92).

m, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = p_2 \left(\ln \frac{p_2}{2p_1} + \frac{m-p_2}{p_2} + 1 - \ln \frac{p_2}{p_1} \right) = m - p_2 \ln 2$ y, finalmente, $e(\mathbf{p}^1, u^0) = p_2 \left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m-p_2}{p_2} + 1 - \ln \frac{p_2}{2p_1} \right) = m + p_2 \ln 2$. A partir de aquí, se obtiene

$$VCR = p_2 \ln 2, \tag{95}$$

$$VER = p_2 \ln 2 \tag{96}$$

y, finalmente, la VEC es

$$VEC = \frac{v(\mathbf{p}^1, m) - v(\mathbf{p}^0, m)}{\lambda(\mathbf{p}, m)} = p_2 \ln 2, \tag{97}$$

ya que $\lambda(\mathbf{p}, m) = \frac{1}{p_2}$ es constante en el nivel de renta y $m^0 = m^1$. [O, calculada de forma alternativa,

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}} \left(p_1, p_2^0, m \right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_1^{\mathrm{m}} \left(p_1^1, p_2, m \right) \mathrm{d}p_2 \\ &= \int_{p_1}^{2p_1} \frac{p_2}{s_1} \mathrm{d}s_1 + 0 \\ &= p_2 \ln 2.] \end{aligned} \tag{97a}$$

En este caso ha variado únicamente el precio del bien en el que las preferencias del individuo son no lineales y, además, estamos considerando equilibrios interiores, con lo cual la demanda de dicho bien carece de efecto renta. La conclusión general es que, en estas circunstancias, las tres evaluaciones monetarias del bienestar coinciden.

(b) Si $m \leq p_2$, el equilibrio del consumidor es un equilibrio de esquina, tanto en la situación inicial de precios como en la final. En tal caso, $u^0 = \ln \frac{m}{p_1}$ y $u^1 = \ln \frac{m}{2p_1}$, con lo cual $e(\mathbf{p}^0, u^0) = p_1 \exp \left(\ln \frac{m}{p_1} \right) = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = 2p_1 \exp \left(\ln \frac{m}{2p_1} \right) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = p_1 \exp \left(\ln \frac{m}{2p_1} \right) = \frac{m}{2}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 2p_1 \exp \left(\ln \frac{m}{p_1} \right) = 2m$. En consecuencia, la reducción de bienestar del individuo es

$$VCR = 2m - m = m, \tag{98}$$

$$VER = m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} \tag{99}$$

y

$$VEC = \int_{p_1}^{2p_1} \frac{m}{s_1} \mathrm{d}s_1 = m \ln 2. \tag{100}$$

(En este caso, a la hora de calcular VEC no podemos utilizar la fórmula $VEC = \frac{v(\mathbf{p}^1, m) - v(\mathbf{p}^0, m)}{\lambda}$ porque $\lambda = \frac{1}{m}$ varía con el nivel de renta.)

Ahora, las diferentes medidas de bienestar ofrecen resultados dispares ya que los equilibrios en los que se evalúa dicho bienestar son de esquina.

Finalmente, a partir de (95) y (98) es inmediato determinar el incremento de renta necesario para mantener el nivel de bienestar de la situación inicial. Si $m > p_2$, entonces de (95) resulta $m^1 = m^0 + p_2 \ln 2$, con lo cual $\Delta m = p_2 \ln 2 = VCR$. En efecto, si m (respectivamente, βm, $\beta > 1$) es la renta en la situación inicial (final), entonces

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \ln \frac{p_2}{2p_1} + \frac{\beta m}{p_2} - 1 \gtreqless \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m - p_2}{p_2} \Leftrightarrow \beta \gtreqless 1 + \frac{p_2 \ln 2}{m}.$$

(a) Si, por otra parte, $m \leq p_2$, entonces de (98) resulta $m^1 = m^0 + m$, con lo cual $\Delta m = m = VCR$. En efecto,

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \ln \frac{\beta m}{2p_1} \gtreqless \ln \frac{m}{p_1} \Leftrightarrow \beta \gtreqless 2.$$

2. Si $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ y $\mathbf{p}^1 = (p_1, 2p_2)$, es decir, si el bien que se encarece es el que afecta linealmente al orden de preferencias, mientras que el precio del bien del que la utilidad depende de forma no lineal se mantiene constante, el análisis es similar al realizado anteriormente:

   (a) Si $m > 2p_2$ (con lo cual $m > p_2$), el equilibrio es de carácter interior en ambas situaciones. En este caso, se verifica que $v(\mathbf{p}^0, m) = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m-p_2}{p_2}$ y $v(\mathbf{p}^1, m) = \ln \frac{2p_2}{p_1} + \frac{m-2p_2}{p_2}$. Por lo tanto, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = \frac{m}{2} + p_2 \ln 2$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 2m - 2p_2 \ln 2$. En consecuencia,

$$VCR = m - 2p_2 \ln 2, \tag{101}$$

$$VER = \frac{m}{2} - p_2 \ln 2 \tag{102}$$

   y

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}} \left(p_1, p_2^0, m\right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_1^{\mathrm{m}} \left(p_1^1, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 \\ &= 0 + \int_{p_2}^{2p_2} \frac{m - s_2}{s_2} \mathrm{d}s_2 \\ &= m \ln 2 + p_2. \end{aligned} \tag{103}$$

   (b) Si $p_2 < m \leq 2p_2$, el equilibrio del consumidor es interior en la situación inicial de precios y es de esquina en la situación final. Con ello, $v(\mathbf{p}^0, m) = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m-p_2}{p_2}$ y $v(\mathbf{p}^1, m) = \ln \frac{m}{p_1}$. Además, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = p_2 \left(\ln m - \ln p_2 + 1\right)$ [41] y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = p_1 \exp\left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m-p_2}{p_2}\right)$. A partir de aquí, el empeoramiento de bienestar queda cuantificado como

$$VCR = p_1 \exp\left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m - p_2}{p_2}\right) - m, \tag{104}$$

[41] En efecto, $p_2(\ln m - \ln p_2 + 1) < p_1 \exp\left(\ln \frac{m}{p_1}\right) = m$.

$$VER = m - p_2 \left(\ln \frac{m}{p_2} + 1 \right) \quad (105)$$

y

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_2}^{p_2^*=m} \frac{m - s_2}{s_2} \mathrm{d}s_2 + \int_{p_2^*=m}^{2p_2} 0 \cdot \mathrm{d}s_2 \\ &= m \left(\ln \frac{m}{p_2} - m + p_2 \right). \end{aligned} \quad (106)$$

A pesar de tener preferencias cuasilineales, las medidas de bienestar anteriores no ofrecen el mismo resultado porque uno de los equilibrios involucrados no es de carácter interior y, por lo tanto, existen efectos renta.

(c) Si $m \leq p_2$, el equilibrio es de esquina en las dos situaciones y no se produce variación alguna en el bienestar del individuo, ya que éste no consume el bien que se ha encarecido. En efecto, $v(\mathbf{p}^0, m) = \ln \frac{m}{p_1}$ y $v(\mathbf{p}^1, m) = \ln \frac{m}{p_1}$, con lo cual $e(\mathbf{p}^0, u^0) = e(\mathbf{p}^1, u^1) = e(\mathbf{p}^0, u^1) = e(\mathbf{p}^1, u^0) = m$. Con ello, $VCR = VER = VEC = 0$.

Determinar el incremento de renta necesario para mantener el nivel de vida del consumidor es inmediato. Si $m > p_2$, entonces $m^1 = m^0 + m - 2p_2 \ln 2$, con lo cual $\Delta m = m - 2p_2 \ln 2$. En efecto,

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \ln \frac{2p_2}{p_1} + \frac{\beta m}{2p_2} - 1 \gtreqless \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1 \Leftrightarrow \beta \gtreqless 2 - \frac{2p_2 \ln 2}{m}.$$

Por otra parte, si $p_2 < m \leq 2p_2$, entonces

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \ln \frac{\beta m}{p_1} \gtreqless \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1 \Leftrightarrow \beta \gtreqless \frac{p_2 \exp\left(\frac{p_2 - m}{p_2}\right)}{m}$$

Finalmente, si $m \leq p_2$, tenemos que

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \ln \frac{\beta m}{p_1} \gtreqless \ln \frac{m}{p_1} \Leftrightarrow \beta \gtreqless 1,$$

lo cual denota que el consumidor mantiene el nivel de bienestar con la misma renta, $m^1 = m^0$.

3. Ahora se encarecen todos los bienes que componen el consumo del individuo. Y es necesario distinguir los tres casos del apartado 2:

(a) Si $m > 2p_2$, el equilibrio es interior y $v(\mathbf{p}^0, m) = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1$ y $v(\mathbf{p}^1, m) = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{2p_2} - 1$. Además, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = \frac{m}{2}$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 2m$. Con ello, la pérdida de bienestar que resulta es

$$VCR = m, \quad (107)$$

$$VER = \frac{m}{2} \tag{108}$$

y

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1, p_2^0, m\right) \mathrm{d}p_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^1} q_1^{\mathrm{m}}\left(p_1^1, p_2, m\right) \mathrm{d}p_2 \\ &= \int_{p_1}^{2p_1} \frac{p_2}{s_1} \mathrm{d}s_1 + \int_{p_2}^{2p_2} \frac{m - s_2}{s_2} \mathrm{d}s_2 \\ &= (\ln 2 - 1)\, p_2 + m \ln 2. \end{aligned} \tag{109}$$

(b) Si $p_2 < m \leq 2p_2$, el equilibrio inicial es de carácter interior, mientras que el equilibrio final es de esquina. Con ello, $v(\mathbf{p}^0, m) = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m-p_2}{p_2}$ y $v(\mathbf{p}^1, m) = \ln \frac{m}{p_1}$. Además, $e(\mathbf{p}^0, u^0) = m$, $e(\mathbf{p}^1, u^1) = m$, $e(\mathbf{p}^0, u^1) = p_2\left(\ln \frac{m}{2p_2} + 1\right)$ y $e(\mathbf{p}^1, u^0) = 2p_1 \exp\left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m-p_2}{p_2}\right)$. Por lo tanto, la pérdida de bienestar es

$$VCR = 2p_1 \exp\left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m - p_2}{p_2}\right) - m, \tag{110}$$

$$VER = m - p_2\left(\ln \frac{m}{2p_2} + 1\right) \tag{111}$$

y

$$\begin{aligned} VEC &= \overbrace{\int_{p_1}^{2p_1} \frac{p_2}{s_1} \mathrm{d}s_1}^{p_2^0 = p_2} \\ &\quad \underbrace{+\int_{p_2}^{p_2^* = m} \frac{m - s_2}{s_2} \mathrm{d}s_2 + \int_{p_2^* = m}^{2p_2} 0 \cdot \mathrm{d}s_2}_{p_1^1 = 2p_1} \\ &= p_2 \ln 2 + m \ln\left(\frac{m}{p_2}\right) - m + p_2. \end{aligned} \tag{112}$$

[Esta misma medida de VEC se obtiene si tomamos otra senda, en cuyo caso

$$\begin{aligned} VEC &= \overbrace{\int_{p_2}^{p_2^* = m} \frac{m - s_2}{s_2} \mathrm{d}s_2 + \int_{p_2^* = m}^{2p_2} 0 \cdot \mathrm{d}s_2}^{p_1^0 = p_1} \\ &\quad \underbrace{+\int_{p_1}^{2p_1} \frac{p_2}{s_1} \mathrm{d}s_1}_{p_2^1 = 2p_2} \\ &= p_2 \ln 2 + m \ln \frac{m}{p_2} - m + p_2. \end{aligned} \tag{112a}$$

(c) Si $m \leq p_2$, el equilibrio es siempre de esquina y el resultado cuando $\mathbf{p}^1 = (2p_1, 2p_2)$ es el mismo que en el apartado 1 cuando $\mathbf{p}^1 = (2p_1, p_2)$, puesto que al ser el equilibrio de tipo $(q_1, 0)$, el que haya variaciones o no en p_2 no provoca efecto alguno sobre el equilibrio del consumidor ni, por lo tanto, sobre su nivel de bienestar.

Para determinar la cuantía de renta que consigue mantener el nivel de vida del individuo cuando se produce una subida del nivel general de precios del 100%, se debe de tener en cuenta que si $m > 2p_2$, entonces

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{\beta m}{2p_2} - 1 \gtreqless \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1 \Leftrightarrow \beta \gtreqless 2,$$

lo que corrobora el hecho de que $m^1 = m^0 + VCR$, es decir, $\Delta m = m$.

Si $p_2 < m \leq 2p_2$, entonces

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \ln \frac{\beta m}{2p_1} \gtreqless \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1 \Leftrightarrow \beta \gtreqless \frac{2p_2 \exp\left(\frac{m-p_2}{p_2}\right)}{m}$$

y existen valores de m y p_2 para los cuales $u^1 = u^0$, siendo $\beta = 2$ o $\beta \neq 2$.

Finalmente, si $m \leq p_2$, el resultado es

$$u^1 \gtreqless u^0 \Leftrightarrow \ln \frac{\beta m}{2p_1} \gtreqless \ln \frac{m}{p_1} \Leftrightarrow \beta \gtreqless 2.$$

La conclusión general de 1, 2 y 3 es que bajo preferencias cuasilineales, las tres medidas monetarias del bienestar coinciden si, y sólo si, todos los equilibrios involucrados son interiores y, además, el precio que varía es el del bien que afecta no linealmente a la utilidad. Sin embargo, cuando algún equilibrio es de esquina y/o el precio que varía es el del bien que afecta linealmente a la utilidad, las medidas ofrecen resultados distintos, debido a la existencia de efectos renta.

4. Una transformación monótona de una función cuasilineal (y, por tanto, cuasicóncava) continúa siendo una función cuasilineal. Por ejemplo, la transformación $z(u) = \ln u = \ln(\ln q_1 + q_2)$ es cuasilineal, ya que la relación marginal de sustitución,

$$RMS_{1,2} = \frac{\frac{1}{\ln q_1 + q_2} \cdot \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{\ln q_1 + q_2} \cdot 1} = \frac{1}{q_1},$$

es justamente la RMS que resulta utilizando la función de utilidad $u(\cdot)$. Por lo tanto, los resultados que hemos obtenido en los apartados 1, 2 y 3 manipulando la función de utilidad $u(\cdot)$ se mantienen si utilizamos una transformación monótona de $u(\cdot)$.[42] ■

[42] Otro tanto ocurre con cualesquiera otras transformaciones de $u(q_1, q_2)$. Por ejemplo, si $w(u) = [u(q_1, q_2)]^n = (\ln q_1 + q_2)^n$, entonces $RMS_{1,2} = \frac{n(\ln q_1 + q_2)^{n-1} \cdot \frac{1}{q_1}}{n(\ln q_1 + q_2)^{n-1} \cdot 1} = \frac{1}{q_1}$.

Ejercicio 3.11

Los camioneros de un determinado país llevan algún tiempo protestando por el alto precio del gasóleo. El camionero representativo de este país vive de gasoil (bien 1) y de numerario (bien 0), y sus preferencias vienen dadas por la función de utilidad $u(q_1, q_0) = \ln q_1 + q_0$. El precio del gasoil es $p_1(1+t)$, siendo t el impuesto (por litro) de carburante, mientras que $p_0 = 1$. La renta del mencionado camionero es m, $m > 0$. Dado el cariz que ha tomado la reivindicación, el gobierno del país se plantea rebajar el impuesto de carburante de t a t', $t' = t - \alpha$, o bien mantener inalterado (el tipo impositivo y) el precio del gasóleo y dar una subvención S al camionero por la cuantía de la recaudación fiscal.

1. ¿Qué política es mejor para el camionero si es suficientemente rico, en el sentido de que su renta es $m > 1$?
2. ¿Qué medida es preferible para el camionero si, por el contrario, tiene una renta $m \leq 1$.

Resolución

Si resolvemos el problema $MAX_{(q_0,q_1)}\ \ln q_1 + q_0$, s.a: $p_1(1+t)q_1 + q_0 = m$, resultan $q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m; t) = \frac{1}{p_1(1+t)}$ y $q_0^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m; t) = m - 1$ como demandas marshallianas de los bienes 1 y 0, respectivamente. Teniendo en cuenta la posibilidad de solución de esquina cuando $m \leq 1$, en cuyo caso $q_0^{\mathrm{m}} = 0$ y $q_1^{\mathrm{m}} = \frac{m}{p_1(1+t)}$, el equilibrio del individuo queda descrito por

$$(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m; t), q_0^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m; t)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{p_1(1+t)}, m-1\right), \text{ si } m > 1 \\ \left(\frac{m}{p_1(1+t)}, 0\right), \text{ si } m \leq 1, \end{cases}$$

y se constata como, efectivamente, en el equilibrio interior la demanda de gasoil no depende de la renta del camionero, m, es decir, no existe efecto renta en la demanda del citado bien.)[43] Si calculamos la función de utilidad indirecta, resulta

$$v(\mathbf{p}, m; t) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{p_1(1+t)}\right) + m - 1, \text{ si } m > 1 \\ \ln \frac{m}{p_1(1+t)}, \text{ si } m \leq 1. \end{cases} \tag{113}$$

A partir de aquí, es preciso realizar el análisis considerando, por una parte, el caso $m > 1$ y, por otra, el caso $m \leq 1$.

1. Si el camionero es suficientemente rico, en el sentido de que $m > 1$, entonces:

   La medida consistente en la rebaja del tipo impositivo, $t' = t - \alpha$, hace que el nuevo nivel de utilidad (indirecta) del individuo pase a ser

$$v_i^I(\cdot) = \ln\left(\frac{1}{p_1(1+t-\alpha)}\right) + m - 1, \tag{114}$$

[43] Esto se puede interpretar como que cualquiera que sea la cuantía de renta del camionero, la cantidad de gasoil que consume es siempre la misma.

donde el subíndice i denota equilibrio interior. Comparando (114) y (113), se concluye que $v_i^I > v$, dado que la función $\ln(\cdot)$ es creciente.

La medida consistente en mantener el tipo impositivo t y aumentar la renta del camionero en la cuantía de la recaudación fiscal $R = tp_1 \frac{1}{p_1(1+t)} = \frac{t}{1+t}$ provoca que el nuevo nivel de bienestar sea

$$v_i^{II}(\cdot) = \ln\left(\frac{1}{p_1(1+t)}\right) + m + \frac{t}{1+t} - 1, \tag{115}$$

ya que cualquier incremento en la renta del camionero va destinado a numerario. Y, comparando (115) y (113) vuelve a constatarse que $v_i^{II} > v$.

Finalmente, comparando (114) y (115), se obtiene que

$$v_i^I(\cdot) \gtreqless v_i^{II}(\cdot) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{t}{t-\alpha}\right) \gtreqless \frac{t}{1+t}, \tag{116}$$

lo cual indica que si la reducción impositiva α es suficientemente elevada, entonces dicha medida es mejor que el aumento de la renta del camionero mediante la subvención, mientras que si la reducción α es pequeña, entonces la segunda medida es preferible.

[En efecto, si fijamos $t = 0,5$ y resolvemos la ecuación $\frac{t}{t-\alpha} = \exp\left(\frac{t}{1+t}\right)$, resulta $\alpha \simeq 0,145$ como solución, en cuyo caso $v_i^I = v_i^{II}$. A partir de aquí, resulta

$$v_i^I \gtreqless v_i^{II} \Leftrightarrow \alpha \gtreqless 0,145,$$

es decir, la primera medida es preferible para valores de α de, al menos, el 29% ($\frac{0,145}{0,5}$), mientras que la preferible es la segunda cuando $\alpha \in [0; 0,145)$. Análogamente, en el caso de que $t = 0,8$, resulta

$$v_i^I \gtreqless v_i^{II} \Leftrightarrow \alpha \gtreqless 0,285,$$

con lo cual la primera medida es preferible para reducciones del tipo marginal impositivo de, al menos, el 35% ($\frac{0,285}{0,8}$), mientras que para $\alpha \in [0; 0,285)$ es preferible la segunda. En definitiva, a medida que aumenta t, la primera política es preferible a la segunda en un menor intervalo de valores del parámetro α.]

2. Si $m \leq 1$, el equilibrio del camionero es de esquina. A partir de aquí,

La reducción del tipo impositivo de t a $t-\alpha$ hace que la nueva función de utilidad indirecta sea

$$v_e^I(\cdot) = \ln\frac{m}{p_1(1+t-\alpha)}, \tag{117}$$

donde con el subíndice e denotamos equilibrio de esquina.

Por otra parte, y dado que la recaudación fiscal es $tp_1 \frac{m}{p_1(1+t)} = \frac{t}{1+t}m$, la medida consistente en devolver esta recaudación al consumidor aumenta su renta de m a $m + \frac{t}{1+t}m =$

$\frac{1+2t}{1+t}m$. Con esta nueva renta, el equilibrio del camionero puede ser un equilibrio de esquina (si $\frac{1+2t}{1+t}m \leq 1$) o pasar a ser un equilibrio interior (si $\frac{1+2t}{1+t}m > 1$). En el primer caso, el equilibrio es el dado por

$$(q_1^{\mathrm{m}}, q_0^{\mathrm{m}}) = \left(\frac{m(1+2t)}{p_1(1+t)^2}, 0\right),$$

mientras que en el segundo caso es

$$(q_1^{\mathrm{m}}, q_0^{\mathrm{m}}) = \left(\frac{1}{p_1(1+t)}, \frac{1+2t}{1+t}m - 1\right).$$

(a) Consideremos que $\frac{1+2t}{1+t}m \leq 1$ (individuo pobre). En este caso, la nueva función de utilidad indirecta es

$$v_e^{II}(\cdot) = \ln \frac{m(1+2t)}{p_1(1+t)^2}. \tag{118}$$

Comparando (117) y (118), resulta

$$v_e^{I}(\cdot) \gtreqless v_e^{II}(\cdot) \Leftrightarrow \ln \frac{m}{p_1(1+t-\alpha)} \gtreqless \ln \frac{m(1+2t)}{p_1(1+t)^2} \Leftrightarrow \ln \frac{(1+t)^2}{(1+t-\alpha)(1+2t)} \gtreqless 0 \tag{119}$$

y resolviendo (119) para algunos valores de t se obtiene que la segunda medida es siempre preferible a la primera.

(b) Consideremos ahora la situación en la que $m \leq 1$, pero $\frac{1+2t}{1+t}m > 1$ (individuo moderadamente rico). En este caso, la nueva función de utilidad indirecta es $v_e^{III}(\cdot) = \ln\left(\frac{m}{p_1(1+t-\alpha)}\right)$ con la primera medida, mientras que con la segunda es $v_e^{IV}(\cdot) = \ln\left(\frac{m}{p_1(1+t)}\right) + m + \frac{t}{1+t} - 1$. Comparando estos dos niveles de utilidad, se tiene que

$$v_e^{III}(\cdot) \gtreqless v_e^{IV}(\cdot) \Leftrightarrow \ln \frac{m(1+t)}{1+t-\alpha} \gtreqless \frac{1+2t}{1+t}m - 1 \tag{120}$$

y vuelve a ocurrir que si la reducción impositiva es suficientemente importante, entonces es una medida preferible a la política de subvención.

[En efecto, si fijamos $m = 0,8$ y $t = 0,5$, y resolvemos (120) se obtiene

$$v_e^{III}(\cdot) \gtreqless v_e^{IV}(\cdot) \Leftrightarrow \alpha \gtreqless 0,377,$$

lo cual indica que la primera medida es preferible a la segunda si la reducción impositiva es de, al menos, el 75,4% ($\frac{0,377}{0,5}$), mientras que si la reducción impositiva adopta cualquier valor del intervalo $0 - 75,4\%$, es decir, si $\alpha \in (0; 0,377)$, entonces la segunda medida es la preferible. Asimismo, en el caso de que $m = 0,8$ y $t = 0,8$, la ecuación (120) tiene como solución

$$v_e^{III}(\cdot) \gtreqless v_e^{IV}(\cdot) \Leftrightarrow \alpha \gtreqless 0,567,$$

con lo cual la primera medida es preferible a la segunda si la reducción impositiva es igual o superior al $70,8\%$ ($\frac{0,567}{0,8}$), mientras que si la reducción impositiva es suficientemente pequeña en el sentido de $\alpha \in (0; 0,567)$, la segunda medida es preferible a la primera.]

En definitiva, cuando la renta del individuo es lo suficientemente elevada, $m > 1$, como para producir un equilibrio interior, el individuo prefiere la rebaja del impuesto a la subvención siempre y cuando dicha reducción sea suficientemente cuantiosa, y prefiere la subvención cuando la reducción impositiva es pequeña. Sin embargo, a medida que aumenta t, es menos probable que la primera política sea la preferible. Para niveles intermedios de renta, en el sentido de $\frac{1+t}{1+2t} < m < 1$, la rebaja impositiva es preferible a la subvención sólo cuando dicha reducción es suficientemente importante. Y, además, dicha política de rebaja impositiva es tanto más probable que sea la preferida por el consumidor cuanto mayor es t. Finalmente, si el camionero tiene una renta suficientemente baja, $0 < m \leq \frac{1+t}{1+2t}$, como para estar siempre situado en un equilibrio de esquina, la política de incrementar su renta con la subvención es inequívocamente mejor que la de reducir el precio del producto. ■

Ejercicio 3.12

Un determinado individuo cuyo orden de preferencias viene representado por la función de utilidad $u(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2 - 1$ y con una renta $m = 6$ se enfrenta a unos precios de los bienes dados por el vector $\mathbf{p}^0 = (4, 3)$.

1. Si, a partir de esta situación, los precios de ambos bienes aumentan el 50%, determinar el efecto que ello produce en el nivel de bienestar del consumidor.

2. Ante el incremento habido en los precios, determinar si un incremento de la renta del consumidor del 50% (piénsese, por ejemplo, en los salarios o las pensiones que aumentasen lo mismo que la tasa de inflación de los precios) mantendría constante el nivel de vida del citado consumidor.

3. Si, a partir de la situación inicial, los precios pasan a ser $\mathbf{p}^1 = (5, 3)$, determinar el efecto sobre el bienestar del consumidor.

Resolución

1. Antes de nada es preciso obtener las demandas marshallianas de bienes de este consumidor. El comportamiento de la función de utilidad es tal que $\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 0 & 2q_1 & 1 \\ 2q_1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$, de donde se deduce que es una función estrictamente cuasicon-

vexa y creciente. Tenemos, pues, curvas de indiferencia estrictamente cóncavas en el espacio $\{q_1, q_2\}$. En efecto, dado $q_2(q_1) = -q_1^2 + u + 1$, entonces $q_2'(q_1) = -2q_1 < 0$ y $q_2''(q_1) = -2 < 0$, es decir, las curvas de indiferencia son decrecientes en el plano $\{q_1, q_2\}$, su pendiente es mayor (en valor absoluto) a medida que aumenta la cantidad consumida del bien 1 y sus puntos de corte con los ejes son $\left(\sqrt{u+1}, 0\right)$ y $(0, u+1)$.

De lo anterior se deriva que el equilibrio, en términos de demandas marshallianas, del consumidor es necesariamente un punto de esquina. Ahora bien, en este caso existen dos posibilidades: $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$. Si comparamos el nivel de utilidad que proporciona cada una de estas dos cestas de bienes, resulta

$$\left(\frac{m}{p_1}, 0\right) \begin{array}{c}\succ\\ \prec\end{array} \left(0, \frac{m}{p_2}\right) \Longleftrightarrow \frac{m^2}{p_1^2} - 1 \begin{array}{c}>\\ <\end{array} \frac{m}{p_2} - 1 \tag{121}$$

y resolviendo (121), se obtienen las demandas marshallianas

$$\left(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)\right) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0\right), \text{ si } m > \frac{p_1^2}{p_2} \\ \left(0, \frac{m}{p_2}\right), \text{ si } m < \frac{p_1^2}{p_2}. \end{cases} \tag{122}$$

Lo que dice (122) es que si los precios de los bienes y la renta del individuo adoptan valores tales que satisfacen la condición $m > \frac{p_1^2}{p_2}$, entonces el bien 2 es, dada la renta del consumidor, relativamente caro con respecto al bien 1, y por ello se demanda sólo el bien 1. En caso contrario, el individuo demanda únicamente el bien 2.[44]

A partir de (122), la función indirecta de utilidad que resulta es

$$v(\mathbf{p}, m) = \begin{cases} \frac{m^2}{p_1^2} - 1, \text{ si } m > \frac{p_1^2}{p_2} \\ \frac{m}{p_2} - 1, \text{ si } m < \frac{p_1^2}{p_2}. \end{cases} \tag{123}$$

Las demandas hicksianas se obtienen de la siguiente manera. Como quiera que el equilibrio, en términos de demandas hicksianas, continúa siendo necesariamente de esquina, es claro que si $q_1 = 0$, entonces de la restricción del programa dual del consumidor, restricción dada por $u = q_1^2 + q_2 - 1$, se concluye que $q_2 = u + 1$, mientras que si $q_2 = 0$, entonces $q_1 = \sqrt{u+1}$. Por lo tanto, los posibles equibrios hicksianos son las cestas $\left(\sqrt{u+1}, 0\right)$ y $(0, u+1)$. Si comparamos, en términos de coste, ambas combinaciones de bienes, resulta

$$\left(\sqrt{u+1}, 0\right) \begin{array}{c}\succ\\ \prec\end{array} (0, u+1) \Leftrightarrow p_1\sqrt{u+1} \begin{array}{c}<\\ >\end{array} p_2(u+1), \tag{124}$$

y resolviendo (124) se obtiene

$$\left(q_1^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u), q_2^{\mathrm{h}}(\mathbf{p}, u)\right) = \begin{cases} \left(\sqrt{u+1}, 0\right), \text{ si } u > \frac{p_1^2}{p_2^2} - 1 \\ (0, u+1), \text{ si } u < \frac{p_1^2}{p_2^2} - 1 \end{cases} \tag{125}$$

[44] Si $m = \frac{p_1^2}{p_2}$, las dos cestas de bienes son indiferentes en términos de utilidad por estar ambas situadas sobre la misma curva de indiferencia (equilibrio múltiple).

como equilibrio del consumidor en términos de demandas hicksianas.[45] A partir de (125), la función de gasto de este consumidor es[46]

$$e(\mathbf{p},u)=\begin{cases} p_1\sqrt{u+1}, \text{ si } u>\frac{p_1^2}{p_2^2}-1 \\ p_2(u+1), \text{ si } u<\frac{p_1^2}{p_2^2}-1. \end{cases} \tag{126}$$

Ya tenemos todos los elementos para cuantificar monetariamente el bienestar del individuo. Los valores iniciales de los precios y la renta, $(\mathbf{p}^0,m)=(4,3,6)$, satisfacen la condición $m>\frac{p_1^2}{p_2}$. Luego, el equilibrio del consumidor en esta situación inicial se compone de las demandas marshallianas $q_1^{\mathrm{m}}=\frac{3}{2}$, $q_2^{\mathrm{m}}=0$. Por otra parte, cuando los precios en la situación final pasan a ser $\mathbf{p}^1=(p_1^1,p_2^1)=(6,\frac{9}{2})$, la condición que satisfacen estos nuevos valores es $m<\frac{p_1^2}{p_2}$, con lo cual el equilibrio final (después de la subida de los precios) es el dado por las demandas marshallianas $q_1^{\mathrm{m}}=0$, $q_2^{\mathrm{m}}=\frac{4}{3}$. Es necesario, pues, valorar monetariamente la reducción de bienestar que se produce por el hecho de "saltar" del equilibrio de esquina $(\frac{3}{2},0)$ (punto E_0 de la Figura 3) al equilibrio de esquina $(0,\frac{4}{3})$ (punto E_1).

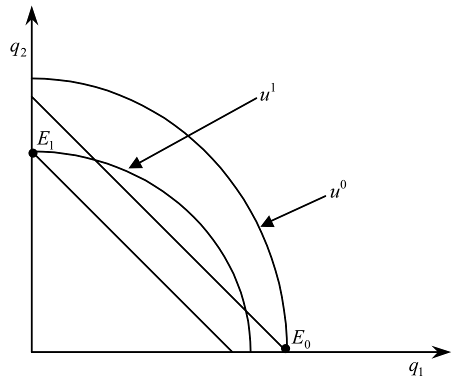

Fig. 3 *Los equilibrios inicial y final*

La función de gasto en la situación inicial se define como $e(\mathbf{p}^0,u^0)=p_1^0\sqrt{u^0+1}$, siendo $u^0=\frac{m^2}{p_1^2}-1=\frac{5}{4}$. Entonces $e(\mathbf{p}^0,\frac{5}{4})=6=m$. Análogamente, en la situación de precios finales, $\mathbf{p}^1$, el gasto (mínimo) necesario para alcanzar la utilidad inicial u^0 es, según la correspondiente función de gasto, $e(\mathbf{p}^1,\frac{5}{4})=p_1^1\sqrt{u^0+1}=9$. Nótese en la expresión de la función $e(\mathbf{p},u)$ dada en (126) que, al estar ésta definida para $u\gtrless\frac{p_1^2}{p_2^2}-1$, es inmediato

[45] Si $u=\frac{p_1^2}{p_2^2}-1$, las dos combinaciones son indiferentes en términos de coste por estar ambas situadas sobre la misma restricción presupuestaria (equilibrio múltiple).

[46] La cual también se podría haber obtenido invirtiendo la expresión de la función de utilidad indirecta dada en (123).

deducir que al cambiar los precios de los bienes 1 y 2 en la misma cuantía, seguimos estamos en la misma situación de precios relativos que en $\mathbf{p}^0$. La idea es que la condición $\frac{p_1^2}{p_2^2} - 1$ no ha variado y, por lo tanto, la mejor manera de colocar la renta para obtener el nivel de utilidad u^0, es decir, la mejor opción en términos de gasto mínimo, continúa siendo el punto E_0 (véase la Figura 3).[47] En consecuencia,

$$VCR = e\left(\mathbf{p}^1, \frac{5}{4}\right) - e\left(\mathbf{p}^0, \frac{5}{4}\right) = 3$$

es la valoración monetaria del descenso en el nivel de bienestar que sufre el individuo. Esto significa que la renta del consumidor tendría que ser $m + VCR = 9$ en la situación final para mantener el nivel de utilidad u^0 o, lo que es lo mismo, debería aumentar el 50% con relación a la renta inicial.

Por otra parte, $u^1 = \frac{m}{p_2^1} - 1 = \frac{1}{3}$, con lo cual $e(\mathbf{p}^1, \frac{1}{3}) = p_2^1\left(u^1 + 1\right) = 6 = m$, mientras que $e(\mathbf{p}^0, \frac{1}{3}) = p_2^0\left(u^1 + 1\right) = 4$. De esta forma,

$$VER = e\left(\mathbf{p}^1, \frac{1}{3}\right) - e\left(\mathbf{p}^0, \frac{1}{3}\right) = 2$$

es la cuantificación monetaria del descenso en el nivel de utilidad provocado por la inflación de precios cuando se toma como referencia el bienestar del periodo final. Esto quiere decir que la inflación existente equivale a ver reducida la renta en la situación inicial a $m - 2 = 4$, lo que representa un recorte del $33,3\%$ de dicha renta.

Finalmente, la VEC del individuo por el hecho de que éste "salta" del equilibrio E_0 al equilibrio E_1 es

$$\begin{aligned} VEC &= \overbrace{\int_{p_1=4}^{p_1^*=3\sqrt{2}} \frac{m}{p_1}\mathrm{d}p_1 + \int_{p_1^*=3\sqrt{2}}^{p_1=6} 0 \cdot \mathrm{d}p_1}^{p_2^0=3} \\ &\quad \underbrace{+\int_{p_2=3}^{p_2=\frac{9}{2}} \frac{m}{p_2}\mathrm{d}p_2}_{p_2^1=6} \\ &= 6\ln\frac{9\sqrt{2}}{8} \simeq 2,78. \end{aligned}$$

La idea que está detrás de la forma de calcular la VEC es la siguiente: Dada la condición $m \gtrless \frac{p_1^2}{p_2}$, es evidente que si $m = 6$ y $p_2 = 3$, entonces $6 > \frac{p_1^2}{3}$ implica que $p_1 < 3\sqrt{2}$, en cuyo caso la demanda relevante del bien 1 es del tipo $q_1^{\mathrm{m}} = \frac{m}{p_1}$, mientras que si $p_1 > 3\sqrt{2}$ dicha demanda pasa a ser $q_1^{\mathrm{m}} = 0$. Por otra parte, una vez que p_1 ha alcanzado el valor final,

[47] En efecto, $p_1^1\sqrt{u^0+1} = 6\sqrt{\frac{5}{4}+1} < \frac{9}{2}\left(\frac{5}{4}+1\right) = p_2^1(u^0+1)$, con lo cual la forma más barata de obtener el nivel de utilidad u^0 es el punto E_0 de la Figura 3.

$p_1 = 6$, y utilizando la condición $6 \gtrless \frac{36}{p_2}$, es evidente que $6 < \frac{36}{p_2}$ para todo $p_2 \in \left[3, \frac{9}{2}\right]$, con lo cual la función de demanda del bien 2 es $q_2^{\mathrm{m}} = \frac{m}{p_2}$.

2. Del apartado anterior, se deduce que la indexación de la renta a la inflación es suficiente para mantener el nivel de bienestar del consumidor, ya que con una renta $m = 9$ en la situación inflacionaria, se verifica que $v^1(\mathbf{p}^1, 9) = \frac{5}{4} = v^0(\mathbf{p}^0, 6)$.[48] Esto refleja la idea, comúnmente aceptada, de que un incremento de la renta en la misma cuantía que el aumento de los precios (indexación de las rentas al incremento del nivel de precios) mantiene el nivel de bienestar de los consumidores.

3. En este caso, los valores de los parámetros en la situación final satisfacen la condición $m < \frac{p_1^2}{p_2}$, con lo cual el equilibrio del consumidor es el punto $(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}) = (0, 2)$ y el nivel de utilidad alcanzado, de ser $u^0 = \frac{5}{4}$, pasa a ser $u^2 = \frac{m}{p_2} - 1 = 1$. Gráficamente:

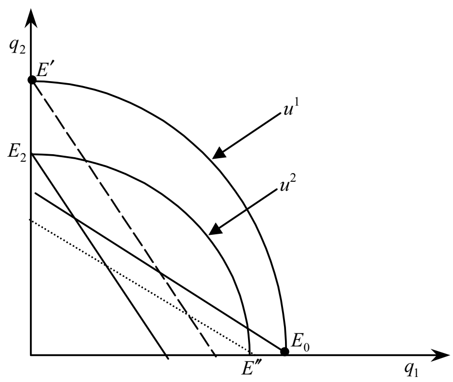

Fig. 4 *Los equilibrios inicial y final*

El gasto mínimo necesario para alcanzar el nivel de utilidad inicial $u^0 = \frac{5}{4}$ a precios $\mathbf{p}^1 = (5, 3)$ es $e(\mathbf{p}^1, \frac{5}{4}) = p_2^1 \left(\frac{5}{4} + 1\right) = \frac{27}{4}$,[49] lo que se consigue con un equilibrio del tipo $(0, q_2^{\mathrm{h}})$. Es decir, la forma de obtener la utilidad inicial a los nuevos precios (incurriendo en el mínimo gasto posible) es pasar de dedicar toda la renta a la compra del bien 1 (punto E_0 en la Figura 4) a destinarla a la adquisición del bien 2 (punto E' en la Figura 4). Entonces

$$VCR = e\left(\mathbf{p}^1, \frac{5}{4}\right) - e\left(\mathbf{p}^0, \frac{5}{4}\right) = \frac{27}{4} - 6 = 0,75$$

es el incremento de renta necesario para mantener en la situación de precios finales el nivel de utilidad de la situación inicial, incremento que es del $12,5\%$.

[48] Nótese que los valores $m = 9$, $p_1 = 6$ (junto con $p_2 = \frac{5}{2}$) satisfacen la condición $m > \frac{p_1^2}{p_2}$.

[49] En efecto, $p_1^1 \sqrt{u^0 + 1} = 5\sqrt{\frac{5}{4} + 1} < p_2^0 \left(u^0 + 1\right) = 3\left(\frac{5}{4} + 1\right)$.

La medida VER de reducción de bienestar del consumidor se obtiene razonando de manera similar al apartado 1: A precios finales $\mathbf{p}^1 = (5,3)$, el individuo consigue el nivel de utilidad $u^2 = 1$ destinando toda su renta al bien 2 (punto E_2 de la Figura 4). A su vez, el mínimo gasto a incurrir para obtener dicho nivel de utilidad cuando los precios son los de la situación inicial, $\mathbf{p}^0 = (4,3)$, es $e\left(p^0, u^2\right) = p_1^0\sqrt{u^2+1} = 4\sqrt{2}$, cosa que el consumidor consigue dedicando toda la renta que tiene al bien 1 (punto E'' de la Figura 4).[50] Entonces, la reducción de bienestar es

$$VER = e(\mathbf{p}^1, 1) - e(\mathbf{p}^0, 1) = 6 - 4\sqrt{2} \simeq 0,34.$$

Finalmente, la VEC que se produce por el hecho de saltar del equilibrio E_0 al equilibrio E_2 es

$$\begin{aligned} VEC &= \int_{p_1=4}^{p_1^*=3\sqrt{2}} \frac{m}{p_1} \mathrm{d}p_1 + \int_{p_1^*=3\sqrt{2}}^{p_1=5} 0 \cdot \mathrm{d}p_1 \\ &= 6 \ln \frac{3\sqrt{2}}{4} \simeq 0,35, \end{aligned}$$

lo que completa la resolución del ejercicio. ■

Ejercicio 3.13

En un mundo de dos bienes —los bienes 1 y 2— cuyos precios son $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, un determinado individuo tiene las preferencias dadas por $u(q_1, q_2) = q_1(q_2+1) + 2q_2$ y una renta cuya cuantía es $m > 0$. Si este individuo tiene la oportunidad de unirse a un economato, cuyos socios pueden comprar el bien 2 un 20% más barato que en el mercado, responder a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué cuota de entrada se le cobrará para ingresar como socio del economato?
2. ¿Cómo evoluciona dicha cuota de entrada con la riqueza del individuo?

Resolución

Si resolvemos el problema

$$MAX_{(q_1,q_2)}\ q_1(q_2+1) + 2q_2, \text{ s.a: } p_1q_1 + p_2q_2 \leq m,$$

se obtienen las demandas marshallianas

$$(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)) = \left(\frac{m - 2p_1 + p_2}{2p_1}, \frac{m + 2p_1 - p_2}{2p_2}\right),$$

con lo cual la función de utilidad indirecta del individuo es

$$u = v(\mathbf{p}, m) = \frac{m - 2p_1 + p_2}{2p_1}\frac{m + 2p_1 + p_2}{2p_2} + \frac{m + 2p_1 - p_2}{p_2}. \tag{127}$$

[50] En efecto, $p_1^0\sqrt{u^1+1} = 4\sqrt{1+1} < 3(1+1) = p_2^0\left(u^1+1\right)$.

1. Un descenso en p_2 incrementa el poder de compra del consumidor (y, por tanto, aumenta su nivel de utilidad) y este incremento es lo que el economato le cobrará como cuota de entrada (disponibilidad marginal a pagar). Basta, pues, con calcular la VCR. Cuando los precios son $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$, la utilidad máxima que el individuo obtiene con la renta m es, según (127),

$$u^0 = v(\mathbf{p}^0, m) = \frac{m - 2p_1 + p_2}{2p_1}\frac{m + 2p_1 + p_2}{2p_2} + \frac{m + 2p_1 - p_2}{p_2},$$

mientras que a los nuevos precios $\mathbf{p}^1 = (p_1; 0,8p_2)$ las utilidades marginales y los precios han de ser tales que (en el equilibrio) satisfagan la condición $RMS = \frac{p_1}{0,8p_2}$, esto es,

$$\frac{q_2 + 1}{q_1 + 2} = \frac{p_1}{0,8p_2}. \tag{128}$$

De (128) resulta $q_1 = \frac{0,8q_2p_2 + 0,8p_2 - 2p_1}{p_1}$. Y lo que queremos es averiguar la nueva renta, m', necesaria para obtener la utilidad inicial u^0 a precios de la situación final, $\mathbf{p}^1$. Formalmente,

$$\frac{m - 2p_1 + p_2}{2p_1}\frac{m + 2p_1 + p_2}{2p_2} + \frac{m + 2p_1 - p_2}{p_2} = \frac{0,8q_2p_2 + 0,8p_2 - 2p_1}{p_1}(q_2 + 1) + 2q_2, \tag{129}$$

condición que se puede reescribir como

$$\frac{0,8p_2}{p_1}q_2^2 + \frac{1,6p_2}{p_1}q_2 + \frac{0,8p_2 - 2p_1}{p_1} - \frac{m - 2p_1 + p_2}{2p_1}\frac{m + 2p_1 + p_2}{2p_2} - \frac{m + 2p_1 - p_2}{p_2}. \tag{130}$$

Resolviendo (130) en q_2, se obtiene la nueva cantidad q_2', e insertando q_2' en (128) se obtiene q_1' para completar el equilibrio (q_1', q_2'). Finalmente, obtenemos la renta buscada m' simplemente como $m' = p_1q_1' + p_2q_2'$. Y, por último, la diferencia $E \equiv m - m'$ es la cantidad máxima que el consumidor estaría dispuesto a pagar por entrar al economato y, por tanto, lo que se le cobraría como cuota de entrada.

2. Dado que $\frac{\partial E}{\partial m} > 0$, dicha cuota aumenta con la renta del potencial entrante al club. A título de ejemplo, si $\mathbf{p}^0 = (2, 5)$, $m = 100$ y $\mathbf{p}^1 = (2, 4)$, la ecuación de segundo grado dada en (130) es

$$\frac{101}{4}\frac{109}{10} + \frac{99}{5} = 2q_2^2 + 4q_2$$

y la raíz positiva de la misma da lugar a $q_2^{\mathrm{m}} = 11,19$ como demanda del bien 2, con lo cual $q_1^{\mathrm{m}} = 22,38$ es la demanda del bien 1. Entonces la renta necesaria para adquirir esta nueva combinación de bienes $(11,19; 22,38)$ es $m' = 4 \cdot 11,19 + 2 \cdot 22,38 = 89,52$. En consecuencia, la cuota de entrada que se le cobraría al individuo por asociarse al economato sería $E = m - m' = 10,48$.

Supongamos ahora que el individuo se enfrenta a los mismos precios de los bienes, pero tiene una renta $m = 200$. En este caso, la condición (130) tiene como solución $q_2^{\mathrm{m}} = 22,37$, con lo cual $q_1^{\mathrm{m}} = 44,73$. Por lo tanto, $m' = 178,94$ es la renta necesaria para adquirir esta cesta de bienes desde el economato. Con ello, resulta $E = m - m' = 21,06$ como cuota de entrada para este individuo, cuota que es mayor (exactamente el doble) que cuando la renta era $m = 100$. En definitiva, el club aprovecha la mayor disponibilidad marginal a pagar por los bienes (en particular por el bien 2) que el consumidor tiene a medida que su renta aumenta[51] y, por lo tanto, fija una cuota de entrada creciente en m. ■

Ejercicio 3.14

Considérese un consumidor Cobb-Douglas del tipo $u(q_1, q_2) = q_1^{1/2} q_2^{1/2}$, donde q_1 y q_2 representan cantidades consumidas de los bienes 1 y 2, respectivamente. Los precios de los bienes son los dados por $(p_1, p_2) \gg \mathbf{0}$ y la renta del individuo es $m > 0$. El gobierno necesita obtener una recaudación fiscal del 40% de la renta de los consumidores para financiar la sanidad pública. Para ello, estudia introducir un impuesto sobre la renta, IRPF, del 40% (impuesto directo) o implantar un impuesto sobre el precio del bien 1 (los carburantes, por ejemplo) que haría aumentar el precio del mencionado bien de p_1 a $(1 + t)p_1$, $t > 0$ (impuesto indirecto) hasta recaudar la misma cantidad que con el impuesto directo. Contéstese a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué impuesto es preferible para el consumidor, el impuesto directo sobre la renta o el gravamen indirecto sobre el bien 1?
2. Explicar gráfica e intuitivamente por qué el impuesto sobre la renta es una política menos costosa (en términos de utilidad, se entiende) de recaudar una determinada cantidad que el impuesto sobre el gasto.
3. El menor perjuicio, en términos de reducción de utilidad, que ocasiona el impuesto sobre la renta con respecto al impuesto sobre el bien 1 ¿es un resultado que continúa siendo válido cuando se gravan todos los bienes y no sólo uno?

Resolución

En este caso, se trata de calcular los efectos que sobre la utilidad producen los dos tipos de gravamen con la restricción de que la recaudación fiscal ha de ser la misma en ambos. Claramente, el instrumento analítico a utilizar para responder a esta cuestión es la función indirecta de utilidad. Las demandas marshallianas derivadas del contexto anterior son las dadas por $(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)) = \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right)$, de donde se obtiene

$$v(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{2\sqrt{p_1 p_2}} \tag{131}$$

como función de utilidad indirecta.

[51] Nótese que existen efectos renta en las demandas marshallianas de ambos bienes.

1. Teniendo en cuenta que la recaudación fiscal ha de ser el 40% de la renta del consumidor, esto es, $T = \frac{2}{5}m$, es preciso calcular el incremento en p_1 que produciría esta misma recaudación impositiva. Si $(1+t)p_1$, entonces $q_1'^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{2(1+t)p_1}$, con lo cual la recaudación fiscal será $T = tp_1 \frac{m}{2(1+t)p_1}$. La condición de igual recaudación,

$$tp_1 \frac{m}{2(1+t)p_1} = \frac{2m}{5},$$

implica que $t = 4$.

Si se utiliza el IRPF (impuesto directo) para obtener la recaudación señalada, entonces la renta disponible del consumidor es $m' = m - \frac{2}{5}m = \frac{3}{5}m$, con lo cual su utilidad final es

$$v^{id}(p_1, p_2, m') = \frac{m'}{2\sqrt{p_1 p_2}} = \frac{3m}{10\sqrt{p_1 p_2}}. \tag{132}$$

Si, por el contrario, se utiliza un impuesto sobre el precio del bien 1 (impuesto indirecto) igual a $4p_1$, $p_1' = 5p_1$, la nueva demanda del bien 1 es $q_1'^{\mathrm{m}} = \frac{m}{2 \cdot 5p_1} = \frac{m}{10p_1}$, con lo cual la utilidad (indirecta) del consumidor pasa a ser

$$v^{ii}(p_1', p_2, m) = \frac{m}{2\sqrt{p_1' p_2}} = \frac{m}{2\sqrt{5p_1 p_2}}. \tag{133}$$

Comparando (132) y (133) resulta

$$v^{ii}(\mathbf{p}, m) < \ v^{id}(\mathbf{p}, m'). \tag{134}$$

Es decir, el consumidor prefiere soportar el impuesto directo antes que ver aumentado el precio del bien 1.

2. La explicación económica del resultado obtenido en (134) es como sigue: Un impuesto sobre el precio del bien 1 (impuesto sobre el gasto) modifica la elección óptima del consumidor a través de dos tipos de efectos. Por una parte, provoca una contracción de la restricción presupuestaria (manteniéndose constante la pendiente de la misma), con lo cual se reduce el poder adquisitivo del consumidor y, con ello, su nivel de utilidad. Por otra parte, el encarecimiento de uno de los bienes altera los precios relativos de los bienes, $\frac{p_1'}{p_2} = \frac{5p_1}{p_2} \neq \frac{p_1}{p_2}$, provocando que la utilidad del consumidor vuelva a reducirse.

   Por el contrario, el impuesto sobre la renta sólo produce el primero de los efectos señalados (disminuye el poder adquisitivo del consumidor debido a la contracción (paralela) que se produce en la restricción presupuestaria), con lo cual la utilidad del consumidor resulta menos afectada.

   Este resultado —el que un consumidor prefiere un impuesto directo antes que un impuesto indirecto que consiga la misma recaudación— se puede representar gráficamente de la siguiente manera:

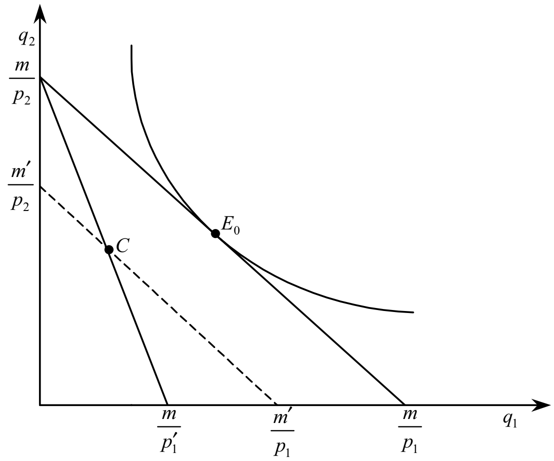

Fig. 5 *El efecto de cada impuesto*

Partiendo de la situación de equilibrio inicial del consumidor, E_0, las restricciones presupuestarias correspondientes a los dos impuestos tienen necesariamente un punto en común, el punto C, ya que ambos impuestos recaudan los mismos ingresos. Entonces, por un argumento de preferencia revelada,[52] el consumidor prefiere el impuesto directo ya que la restricción presupuestaria que dicho impuesto induce contiene siempre la asignación del consumidor bajo el impuesto indirecto, tal como se vislumbra en la Figura 5.

3. Este resultado es generalizable al caso en que sean gravados todos los bienes y no sólo uno como en la situación anterior. En este caso, los precios pasarían a ser $p_1' = (1+t_1)p_1$ y $p_2' = (1+t_2)p_2$, con lo cual $q_1'^{\mathrm{m}} = \frac{m}{2(1+t_1)p_1}$ y $q_2'^{\mathrm{m}} = \frac{m}{2(1+t_2)p_2}$ son las nuevas demandas marshallianas. La recaudación fiscal es, pues,

$$T = t_1 p_1 \frac{m}{2(1+t_1)p_1} + t_2 p_2 \frac{m}{2(1+t_2)p_2}$$

y dado que dicha recaudación ha de ser igual a la que se obtenga con el impuesto sobre la renta, $T = \frac{2}{5}m$, entonces

$$t_1 p_1 \frac{m}{2(1+t_1)p_1} + t_2 p_2 \frac{m}{2(1+t_2)p_2} = \frac{2}{5}m. \tag{135}$$

Resolviendo (135), se obtienen los impuestos $t_1 > 0$ y $t_2 > 0$ tales que satisfacen la condición

$$t_1 + t_2 + 6t_1t_2 = 4, \tag{136}$$

[52] Véase más adelante el Capítulo 6.

es decir, $t_2 = \frac{4-t_1}{1+6t_1}$ y $t_1 \in (0,4)$. Entonces la utilidad máxima es

$$v^{II}(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{2\sqrt{p_1(1+t_1)p_2\left(1+\frac{4-t_1}{1+6t_1}\right)}}, \text{ con } t_1 \in (0,4)\,, \tag{137}$$

y comparando (137) con (132) continúa siendo cierto que $v^{II}(\mathbf{p}, m) < v^{id}(\mathbf{p}, m')$. En definitiva, para el consumidor sigue siendo preferible el impuesto sobre la renta (impuesto directo) al gravamen sobre el precio de los bienes (impuestos indirectos).[53]

El mensaje de este resultado es que los impuestos indirectos provocan mucha distorsión en el comportamiento de los agentes económicos a través de la alteración provocada en los precios relativos de los bienes y ello genera una ineficiencia mayor que cuando los individuos soportan impuestos directos. ■

Ejercicio 3.15

Siguiendo con el escenario del Ejercicio 3.14, consideremos ahora el lado de las subvenciones. Supongamos que el gobierno pretende aumentar el nivel de bienestar de los individuos en un 100%, sea cual sea la política de subvención que finalmente utilice. A tal fin, contempla la utilización de una transferencia directa al consumidor de cuantía S (subvención directa) o, alternativamente, de una política de subvención del bien 1, mediante la cual su precio queda reducido de p_1 a $(1-s)p_1$, $s \in (0,1)$ (subvención indirecta). Contéstese a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué política es la preferible desde el punto de vista del coste que implica cada una de ellas para el gobierno?
2. Explicar intuitiva y gráficamente por qué la transferencia directa de renta es una forma menos costosa para el Estado (de aumentar en una determinada cuantía la utilidad de los individuos) que la subvención del bien 2.
3. El resultado anterior de que la transferencia directa supone menor gasto que la política de subvencionar los bienes, ¿continúa siendo válido si, en lugar de subvencionarse un único, se subvencionan todos ellos?

Resolución

En este caso utilizamos la función de gasto como instrumento analítico. Invirtiendo (131) resulta, como función de gasto para alcanzar el nivel de utilidad (inicial) u,

$$e(p_1, p_2, u) = 2\sqrt{p_1 p_2}\,u. \tag{138}$$

[53] Si $t_1 = t_2 = t$, en cuyo caso la condición (136) se reduce a $3t^2 + t - 2 = 0$, el impuesto indirecto es equivalente al impuesto sobre la renta (al aumentar los precios de todos los bienes en la misma cuantía, la pendiente de la restricción presupuestaria no varía, únicamente se desplaza hacia el origen), con lo cual el consumidor estaría indiferente entre un impuesto u otro.

1. Dada la utilidad inicial del consumidor, u, el gobierno pretende aumentar al doble dicha utilidad, $u' = 2u$. Si estamos en un contexto en el que no varían los precios de los bienes, alcanzar este nuevo nivel de utilidad supondría que el consumidor tendría que incurrir en un gasto $e'(p_1, p_2, u) = 4\sqrt{p_1 p_2}u$. En consecuencia, necesita tener una renta adicional de

$$\begin{aligned} T &= e(p_1, p_2, u') - e(p_1, p_2, u) \\ &= 2\sqrt{p_1 p_2}u \\ &= e(p_1, p_2, u) = m. \end{aligned} \tag{139}$$

Éste es, precisamente, el coste que le supondría al gobierno realizar una transferencia directa al consumidor (por dicha cuantía).

Alternativamente, si se pretende que el individuo alcance la utilidad u' subvencionando el bien 1, p_1 debería disminuir de manera tal que la utilidad del consumidor aumentase el 100%. Formalmente, sirviéndonos de la función de utilidad indirecta, el nuevo precio p_1' ha de verificar la condición $v(p_1', p_2, m) = 2v(p_1, p_2, m)$, es decir,

$$\frac{m}{2\sqrt{p_1' p_2}} = 2\frac{m}{2\sqrt{p_1 p_2}}. \tag{140}$$

Resolviendo (140), se obtiene $p_1' = \frac{1}{4}p_1$ como precio que el consumidor acaba pagando por el bien 1. Ello significa que hay que reducir o subvencionar el precio del bien 1 en $s = \frac{3}{4}$, lo cual supone un gasto para el gobierno de $S = e(p_1', p_2, u') = \frac{3}{4}p_1 q_1'^{\mathrm{h}}$, y donde $q_1'^{\mathrm{h}}$ denota la nueva demanda hicksiana del bien 1 que (junto a la demanda hicksiana del bien 2) permite al consumidor alcanzar el nivel de utilidad $2u$ a precios p_1' y p_2.

Teniendo en cuenta que $q_1'^{\mathrm{h}} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}u' = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}2u$, el gasto que implica la subvención al bien 1 es

$$S = e(p_1', p_2, u') = \frac{3}{4}p_1 q_1'^{\mathrm{h}} = 3\sqrt{p_1 p_2}u = 3m. \tag{141}$$

Finalmente, comparando (139) y (141) resulta que

$$S = 3T, \tag{142}$$

por lo que la política de transferencia directa al consumidor es preferible a la de subvencionar el bien 1.

2. La explicación del resultado obtenido en (142) es similar a la ofrecida en el caso de los impuestos (véase el apartado 1 del Ejercicio 3.14): La transferencia directa al consumidor aumenta su capacidad adquisitiva en forma de un desplazamiento paralelo y hacia fuera de su restricción presupuestaria. Por el contrario, la subvención mediante la reducción de p_2, además de aumentar la renta real del consumidor, cambia los precios relativos de los bienes, ya que $\frac{p_1}{p_2} \neq \frac{p_1}{p_2'} = \frac{4p_1}{p_2}$ y, por tanto, se traduce en una modificación de la pendiente de la restricción de balance.

Gráficamente, se tiene la situación representada en la siguiente figura:

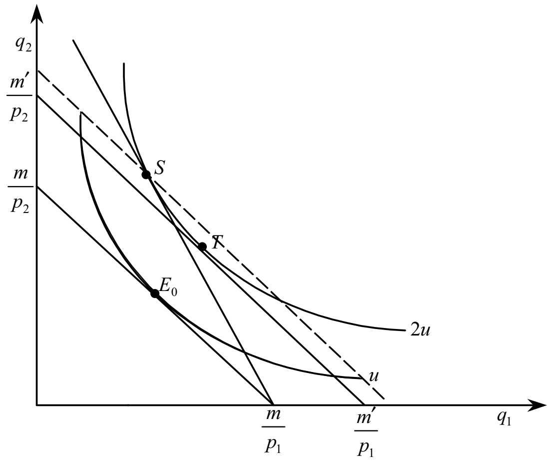

Fig. 6 *Transferencias y subvenciones*

en la cual es inmediato constatar que para alcanzar el mismo nivel de utilidad, la subvención (que sitúa al consumidor en el punto S de la Figura 6) implica un mayor gasto que la transferencia directa (que lo sitúa en el punto T).[54]

3. El resultado del apartado 2 continúa siendo válido si en lugar de subvencionar un solo bien se subvencionan todos ellos simultáneamente. En este caso, los nuevos precios para el consumidor serían $p_1' = (1-s_1)p_1$ y $p_2' = (1-s_2)p_2$, y dado que el objetivo es que el consumidor siga alcanzando el doble de utilidad que lograba con la transferencia directa, entonces ha de cumplirse la condición

$$\frac{m}{2\sqrt{p_1'p_2'}} \equiv \frac{m}{2\sqrt{(1-s_1)p_1(1-s_2)p_2}} = \frac{2m}{2\sqrt{p_1p_2}}. \qquad (143)$$

Resolviendo (143), se obtiene el par de subvenciones $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ tales que

$$1 = 4(1-s_1)(1-s_2), \qquad (144)$$

es decir, $s_2 = \frac{3-4s_1}{4(1-s_1)}$, con $s_1, s_2 \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$. Y es cierto que para todo $s_1, s_2 \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ que satisfagan (144) la transferencia directa supone un menor coste para el gobierno que la subvención aplicada a todos los bienes de consumo. En efecto, dadas las demandas hicksianas, $q_1'^{\text{h}} = \sqrt{\frac{p_2'}{p_1'}}2u = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{3-4s_1}{4(1-s_1)}\right)p_2}{(1-s_1)p_1}}2u$ y $q_2'^{\text{h}} = \sqrt{\frac{p_1'}{p_2'}}2u = \sqrt{\frac{(1-s_1)p_1}{\left(1-\frac{3-4s_1}{4(1-s_1)}\right)p_2}}2u$, el

[54] Utilícese para ello un argumento de preferencia revelada. (Véase más adelante el Capítulo 6.)

gasto que supone para el gobierno la subvención es

$$\begin{aligned} s_1p_1 \cdot q_1'^{\mathrm{h}} + s_2p_2 \cdot q_2'^{\mathrm{h}} &= s_1p_1\sqrt{\frac{\left(1-\frac{3-4s_1}{4(1-s_1)}\right)p_2}{(1-s_1)p_1}2u} + \frac{3-4s_1}{4(1-s_1)}p_2\sqrt{\frac{(1-s_1)\,p_1}{(1-\frac{3-4s_1}{4(1-s_1)})p_2}2u} \\ &= s_1\frac{1}{2(1-s_1)}\sqrt{p_1p_2}2u + \frac{3-4s_1}{2}\sqrt{p_1p_2}2u \qquad (145) \end{aligned}$$

y comparando (145) con (138) se tiene que

$$2\sqrt{p_1p_2}u < \left(s_1\frac{1}{2(1-s_1)} + \frac{3-4s_1}{2}\right)\sqrt{p_1p_2}2u,$$

para todo $s_1 \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$. Es decir, el coste para el gobierno de la política de transferencia de renta (subvención directa) que aumente al doble el nivel de utilidad es menor que el que supone subvencionar todos los bienes (subvención indirecta).[55] La explicación de este resultado radica en que la afectación de los precios (relativos) de los bienes genera mucha distorsión asignativa, lo cual es altamente perjudicial para los agentes afectados. ■

Ejercicio 3.16

Consideremos un consumidor cuyas preferencias son las representadas por la función de utilidad $u(q_1, q_2) = q_1q_2$. Su renta es m y el sistema de precios al que se enfrenta es el dado por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$. Si el Estado establece un impuesto indirecto de tipo marginal t sobre el bien 1:

1. Calcular la pérdida de utilidad que ello provoca en el consumidor.
2. ¿Es posible compensar esta pérdida mediante la devolución de la recaudación impositiva?

Resolución

1. Dado que las demandas marshallianas que presenta el consumidor son

$$(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right), \text{ si } \mathbf{p} = \mathbf{p}^0 = (p_1, p_2) \\ \left(\frac{m}{2(p_1+t)}, \frac{m}{2p_2}\right), \text{ si } \mathbf{p} = \mathbf{p}^1 = (p_1+t, p_2), \end{cases} \qquad (146)$$

la función de utilidad indirecta del citado consumidor es

$$v(\mathbf{p}, m) = \begin{cases} \frac{m^2}{4p_1p_2}, \text{ si } \mathbf{p} = \mathbf{p}^0 = (p_1, p_2) \\ \frac{m^2}{4(p_1+t)p_2}, \text{ si } \mathbf{p} = \mathbf{p}^1 = (p_1+t, p_2) \end{cases}$$

[55] Si la subvención es la misma para todos los bienes, $s_1 = s_2 = s$, la condición (144) se convierte en $4s^2 - 8s + 3 = 0$ y las dos políticas son idénticas (el consumidor estaría indiferente entre una u otra), ya que los precios relativos de los bienes permanecen inalterados con cualquiera de ellas y la pendiente de la restricción presupuestaria no varía.

y la función de gasto es

$$e(\mathbf{p},u)=\begin{cases} 2\sqrt{p_1p_2u}, \text{ si } \mathbf{p}=\mathbf{p}^0=(p_1,p_2) \\ 2\sqrt{(p_1+t)p_2u}, \text{ si } \mathbf{p}=\mathbf{p}^1=(p_1+t,p_2). \end{cases} \tag{147}$$

Entonces si el nivel de utilidad de referencia es el de la situación inicial (la situación sin impuesto), es decir, $u^0=\frac{m^2}{4p_1p_2}$, la función de gasto (147) resulta

$$e\left(\mathbf{p},u^0\right)=\begin{cases} m, \text{ si } \mathbf{p}=\mathbf{p}^0=(p_1,p_2) \\ \sqrt{\frac{p_1+t}{p_1}}m, \text{ si } \mathbf{p}=\mathbf{p}^1=(p_1+t,p_2), \end{cases}$$

con lo cual la pérdida de utilidad que sufre, en términos de VCR, es

$$VCR=\left(1-\sqrt{\frac{p_1+t}{p_1}}\right)m,$$

o, lo que es lo mismo, para que el consumidor pueda mantener el nivel de bienestar una vez que soporta el impuesto indirecto, deberíamos darle la cantidad de renta

$$C=\left(\sqrt{\frac{p_1+t}{p_1}}-1\right)m. \tag{148}$$

2. La renta monetaria del consumidor, una vez que éste ha sido compensado tras la instauración del impuesto, pasa a ser $\sqrt{\frac{p_1+t}{p_1}}m$, y su nuevo equilibrio, teniendo en cuenta (146), es el dado por

$$\begin{aligned}(q_1^{\mathrm{m}},q_2^{\mathrm{m}}) &= \left(\frac{m}{2(p_1+t)},\frac{m}{2p_2}\right)\\ &= \left(\frac{m}{2\sqrt{p_1(p_1+t)}},\frac{m}{2p_2}\sqrt{\frac{p_1+t}{p_1}}\right),\end{aligned}$$

con lo cual la recaudación impositiva es

$$R=tq_1^{\mathrm{m}}=t\frac{m}{2\sqrt{p_1(p_1+t)}} \tag{149}$$

y esta recaudación es menor que la pérdida de utilidad que sufre el consumidor, por cuanto

$$t\frac{m}{2\sqrt{p_1(p_1+t)}}<\left(\sqrt{\frac{p_1+t}{p_1}}-1\right)m,$$

por lo que la diferencia

$$\left(\sqrt{\frac{p_1+t}{p_1}}-1-\frac{t}{2\sqrt{p_1(p_1+t)}}\right)m \tag{150}$$

representa la pérdida neta de bienestar provocada por la existencia del impuesto. ■

Ejercicio 3.17

Consideremos un individuo con una función de utilidad $u(q_1, q_2) = q_1 q_2$, donde q_1 es la cantidad que consume del bien 1 y q_2 la cantidad que consume del bien 2. La renta del individuo es m y permanece inalterada a lo largo de dos periodos, t^0 y t^1, mientras que los precios de los bienes son los dados por $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ en el periodo t^0 y por $\mathbf{p}^1 = \left(\frac{3}{4}p_1, 2p_2\right)$ en el periodo t^1. En estas condiciones:

1. Determinar las cantidades consumidas por el individuo en el periodo inicial.
2. Calcular y comparar el índice de Laspeyres y el índice verdadero del coste de la vida.
3. Determinar las cantidades consumidas por el individuo en el periodo final.
4. Calcular y comparar el índice de Paasche y el índice recíproco del coste de la vida.

Resolución

1. Resolviendo el problema de maximización de la utilidad del individuo, las cantidades que consume en el periodo inicial son

$$\mathbf{q}^0 = \left(q_1^0, q_2^0\right) = \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right), \tag{151}$$

con lo cual el nivel de utilidad es $u(\mathbf{q}^0) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$.

2. Para determinar cómo el descenso de p_1 y el incremento de p_2 ha afectado al "índice general de precios", podemos utilizar el índice de Laspeyres de precios, el cual pondera los precios por las cantidades consumidas en el periodo inicial, y se define como $L_p = \frac{\sum_j p_j^1 q_j^0}{\sum_j p_j^0 q_j^0}$. En este caso,

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{p_1^1 q_1^0 + p_2^1 q_2^0}{p_1^0 q_1^0 + p_2^0 q_2^0} \\ &= \frac{\frac{3}{4}p_1 \frac{m}{2p_1} + 2p_2 \frac{m}{2p_2}}{p_1 \frac{m}{2p_1} + p_2 \frac{m}{2p_2}} = 1,375, \end{aligned} \tag{152}$$

lo que significa que el índice general de precios de Laspeyres registró un aumento del $37,5\%$.[56] Dicho de otra forma, si compensamos al consumidor con un incremento de esa cuantía en su renta monetaria (indiciación de la renta a la subida general de precios), podría seguir adquiriendo la combinación inicial de bienes.

Para determinar una medición más exacta del cambio de bienestar, utilizamos el índice verdadero de precios de Laspeyres o índice verdadero del coste de la vida, para lo cual

[56] Además, el índice de variación en la renta ha sido $M = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^0} = \frac{m^1}{m^0} = 1$, ya que la renta monetaria se mantiene inalterada.

se puede argumentar de la siguiente manera: a partir de la situación de referencia u^0 —situación obtenida con los parámetros $\mathbf{p}^0$ y m—, ¿cuál es la renta m^* necesaria para mantener u^0 cuando los precios son los dados por $\mathbf{p}^1$? A partir de aquí, el índice verdadero del coste de la vida es $V = \frac{m^*}{m}$, siendo $m^* = p_1^1 q_1^* + p_2^1 q_2^*$, es decir,

$$V = \frac{p_1^1 q_1^* + p_2^1 q_2^*}{p_1^0 q_1^0 + p_2^0 q_2^0} = \frac{e\left(\mathbf{p}^1, u^0\right)}{e\left(\mathbf{p}^0, u^0\right)},$$

con lo cual es preciso "dar" (respectivamente, "quitar") al consumidor la cantidad de renta compensatoria de $m^* - m$, si $V > 1$ (si $V < 1$).

Dado el nivel de utilidad $u^0 = \frac{m^2}{4p_1p_2}$, es preciso calcular la renta mínima m^* que permite al consumidor mantener este nivel de utilidad cuando los precios son los dados por $\mathbf{p}^1 = \left(\frac{3}{4}p_1, 2p_2\right)$. Con la renta m^* y los precios $\left(\frac{3}{4}p_1, 2p_2\right)$, las cantidades de equilibrio (q_1^*, q_2^*) deben satisfacer las condiciones

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1^1}{p_2^2} \Rightarrow \frac{q_2^*}{q_1^*} = \frac{\frac{3}{4}p_1}{2p_2} \tag{153}$$

y

$$q_1^* q_2^* = \frac{m^2}{4p_1p_2} \equiv u^0. \tag{154}$$

Resolviendo (153)-(154), obtenemos

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{m}{p_1}, \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{3m}{8p_2}\right),$$

con lo cual $m^* = \frac{3}{4}p_1 q_1^* + 2p_2 q_2^*$ da lugar a

$$\begin{aligned} m^* &= \frac{3}{4}p_1\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{m}{p_1} + 2p_2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{3m}{8p_2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}m \end{aligned}$$

como la renta que permite mantener el nivel de utilidad inicial a precios finales. Es preciso, pues, dar al consumidor la renta compensatoria $m^* - m = 0,225m$ o, dicho de otra forma, la pérdida de utilidad que sufre el consumidor viene cuantificada por una reducción del $22,5\%$ en su renta.

El índice verdadero del coste de la vida es, en definitiva, igual a

$$V = \frac{m^*}{m} = 1,225, \tag{155}$$

el cual indica un aumento del coste de la vida del $22,5\%$. Comparando (152) y (155), se verifica que $L_p > V$,[57] lo cual denota que el bienestar del consumidor se redujo en el periodo 1.

[57] Es decir, V es una cota inferior de L_p.

3. A partir de (151), las cantidades demandadas a precios $\mathbf{p}^1 = \left(\frac{3}{4}p_1, 2p_2\right)$ y renta m son

$$\mathbf{q}^1 = \left(q_1^1, q_2^1\right) = \left(\frac{m}{2\left(\frac{3}{4}p_1\right)}, \frac{m}{2\left(2p_2\right)}\right) = \left(\frac{m}{\frac{3}{2}p_1}, \frac{m}{4p_2}\right),$$

con lo cual $u^1 = \frac{m^2}{6p_1p_2}$ es el nivel de utilidad alcanzado por el consumidor a precios finales. Para determinar el efecto sobre la "renta real" podemos comparar el coste, a precios constantes, de las cantidades consumidas en ambas situaciones. Si utilizamos como precios de referencia $\mathbf{p}^0$, tenemos el índice de Laspeyres de cantidades, el cual se define como

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{p_1^0q_1^1 + p_2^0q_2^1}{p_1^0q_1^0 + p_2^0q_2^0} \\ &= \frac{p_1\frac{m}{\frac{3}{2}p_1} + p_2\frac{m}{4p_2}}{p_1\frac{m}{2p_1} + p_2\frac{m}{2p_2}} = 0,917, \end{aligned}$$

y el hecho de que $L_q < 1$ denota un empeoramiento del bienestar del consumidor en el siguiente sentido: a precios $\mathbf{p}^0$, la cesta $\mathbf{q}^1$ también era asequible, pero fue descartada en favor de $\mathbf{q}^0$; luego, tener que aceptarla a precios $\mathbf{p}^1$ supone —siempre que las preferencias no hayan cambiado— una reducción del bienestar.

4. El índice de Paasche de precios considera como periodo base el periodo final (corriente) y utiliza como referencia las cantidades adquiridas en el periodo final, por lo que $P_p = \frac{\sum_j p_j^1q_j^1}{\sum_j p_j^0q_j^1}$. En el presente caso,

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{p_1^1q_1^1 + p_2^1q_2^1}{p_1^0q_1^1 + p_2^0q_2^1} \\ &= \frac{\frac{3}{4}p_1\frac{m}{\frac{3}{2}p_1} + 2p_2\frac{m}{4p_2}}{p_1\frac{m}{\frac{3}{2}p_1} + p_2\frac{m}{4p_2}} = 0,857, \end{aligned}$$

es decir, el índice de precios de Paasche registra un descenso del 14,3%. Es decir, si en vez de reducirse p_1 y aumentar p_2 disminuyese la renta del consumidor un 14,3%, éste podría adquirir la misma cesta de bienes que si hubiese ocurrido la reducción de p_1 y el aumento de p_2. Desde este punto de vista, la reducción de p_1 y el aumento de p_2 equivale a que todos los precios hubiesen disminuido uniformemente el 14,3%.[58]

Una vez más, para obtener una medida más exacta del cambio de bienestar, utilizamos el índice verdadero de precios de Paasche o índice recíproco del coste de la vida. El razonamiento es el siguiente: si tomamos como referencia el nivel de utilidad u^1, el cual se corresponde con la renta m y los precios $\mathbf{p}^1$, nos preguntamos ¿cuál es la renta mínima $m^\bullet$ que debería tener el individuo para alcanzar el nivel de utilidad u^1 bajo el sistema

[58] Además, $M = \frac{m^1}{m^0} = 1$, con lo cual $P_p < M$ y ello denota mejora del bienestar.

de precios $\mathbf{p}^0$? Teniendo en cuenta que $m^\bullet = p_1^0 q_1^\bullet + p_2^0 q_2^\bullet$, el ratio $W = \frac{m}{m^\bullet}$[59] es lo que se conoce como índice recíproco del coste de la vida e indica aumento (respectivamente, reducción) del bienestar del individuo, según que $W < 1$ (> 1). Y la renta $m - m^\bullet$ mide la ganancia de bienestar resultante de la variación de precios (si dicha diferencia es positiva) o la pérdida de bienestar (si es negativa).

En el caso que nos ocupa, y dado el nivel de utilidad $u^1 = \frac{m^2}{36p_1^2p_2^2}$, el nivel de renta $m^\bullet$ se determina una vez calculadas las cantidades $(q_1^\bullet, q_2^\bullet)$ de equilibrio. Éstas deben satisfacer las condiciones

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1^0}{p_2^0} \Rightarrow \frac{q_2^\bullet}{q_1^\bullet} = \frac{p_1}{p_2} \tag{156}$$

y

$$q_1^\bullet \cdot q_2^\bullet = \frac{m^2}{6p_1p_2} = u^1. \tag{157}$$

Resolviendo (156)-(157), obtenemos

$$(q_1^\bullet, q_2^\bullet) = \left(\frac{m}{\sqrt{6}p_1}, \frac{m}{\sqrt{6}p_2}\right),$$

con lo cual

$$m^\bullet = p_1\frac{m}{\sqrt{6}p_1} + p_2\frac{m}{\sqrt{6}p_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}m.$$

Por lo tanto, cuando el sistema de precios es el dado por el vector $\mathbf{p}^0 = (p_1, p_2)$ una renta igual a $\sqrt{\frac{2}{3}}m$ sería suficiente para alcanzar el mismo nivel de utilidad que el que se obtiene con la renta m y los precios dados por el vector $\mathbf{p}^1 = \left(\frac{3}{4}p_1, 2p_2\right)$. La cantidad de renta dada por la diferencia $m - \sqrt{\frac{2}{3}}m \simeq 0,183m$ es, pues, una medida de la pérdida de bienestar que experimenta el consumidor con la variación de precios.

Finalmente, el índice recíproco del coste de la vida es igual a

$$W = \frac{m}{m^\bullet} = 1,225,$$

e indica un aumento del coste de la vida del $22,5\%$. Además, se verifica que W es una cota superior de P_p, es decir, $W > P_p$.[60] ■

[59] Es necesario tener en cuenta que se trata de un índice basado en el concepto de variación equivalente de la renta (VER).

[60] Nótese que llegamos al resultado contradictorio de que, mientras que el índice de Paasche indica una reducción del nivel general de precios, el índice recíproco del coste de la vida denota un aumento del coste de la vida.

Ejercicio 3.18

Un consumidor adquiere cantidades de dos bienes —los bienes 1 y 2— y los datos de precios de mercado de los bienes, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, y de cantidades compradas de dichos bienes, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, en cuatro periodos de tiempo distintos son los dados por la siguiente tabla

	t^0	t^1	t^2	t^3
$\mathbf{p}$	$(5, 6)$	$(6, 4)$	$(6, 4)$	$(6, 4)$
$\mathbf{q}$	$(30, 25)$	$(20, 30)$	$(25, 38)$	$(22, 33)$

1. ¿En qué casos pueden obtenerse conclusiones inequívocas con esta información de precios y cantidades?
2. Cuando no es posible obtener tales conclusiones, ¿qué información sobre preferencias deberíamos tener?

Resolución

1. En el paso de la situación t^0 a la situación t^1, el precio del bien 1 aumentó y el del bien 2 disminuyó. Además, la renta del consumidor o gasto efectuado también disminuyó: $m^0 = 300$ y $m^1 = 240$. Si utilizamos los números índice (que precisan información relativa sólo a las variables observables, precios y cantidades), tenemos que el índice de precios de Laspeyres es

$$L_p = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^0}{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^0} = \frac{280}{300} = 0,933, \tag{158}$$

el índice de Paasche de precios es

$$P_p = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^1} = \frac{240}{280} = 0,857, \tag{159}$$

el índice de Laspeyres de cantidades es

$$L_q = \frac{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^0} = \frac{280}{300} = 0,933 \tag{160}$$

y, finalmente, el índice de Paasche de cantidades es

$$P_q = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^0} = \frac{240}{280} = 0,857. \tag{161}$$

A partir de (158)-(161) se constata que $L_q < 1$ y, en consecuencia, $P_p > M$, siendo M el índice de renta monetaria, $M = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^0} = \frac{240}{300}$. En este caso el consumidor empeora en la situación t^1 con respecto a la situación t^0. La idea subyacente es que el consumidor pudo haber elegido en t^0 la combinación de bienes $\mathbf{q}^1$ y, dado que la desechó en favor de $\mathbf{q}^0$, significa que la combinación $\mathbf{q}^0$ se reveló preferida a $\mathbf{q}^1$. Por lo tanto, la elección en t^1 de dicha combinación significa una reducción en su nivel de bienestar.

Análogamente, en el paso de t^0 a t^2, se observa que $P_q > 1$ y, en consecuencia, $L_p < M$. Por lo tanto, el consumidor experimenta una mejora de bienestar.

En el paso de t^0 a t^3, se verifica que $L_q > 1$, $P_q < 1$ y $L_p > M > P_p$, con lo cual no es posible obtener una conclusión inequívoca teniendo sólo esta información de precios y cantidades. La combinación de bienes $\mathbf{q}^3$ no es asequible en t^0 con la renta m^0, ni la combinación $\mathbf{q}^0$ es asequible en t^3 con la renta m^3. En definitiva, caemos en una ambigüedad.

2. En los dos primeros casos el consumidor racional y consistente (es decir, el consumidor que no hubiese alterado sus preferencias entre ambas situaciones) empeora o mejora, independientemente de cuales sean sus gustos, es decir, independientemente de cual sea su particular función de utilidad. O, dicho de otra manera, en estos casos no es necesario tener conocimiento exacto de los detalles de la función de utilidad del consumidor para extraer resultados inequívocos respecto a la evolución de su bienestar.

   En el último caso, sin embargo, es posible que el comportamiento de los índices basados exclusivamente en datos de precios y cantidades provea conclusiones distintas para individuos con diferentes preferencias. En efecto, supongamos que tuviésemos información sobre las preferencias de un determinado consumidor y que éstas fuesen, en particular, las representadas por la función de utilidad $u(\cdot) = q_1 q_2$. En dicho caso, es evidente que

$$u^3 = 22 \cdot 33 < 30 \cdot 25 = u^0,$$

   con lo cual este individuo Cobb-Douglas empeoraría en la situación t^3 con respecto a la situación t^0.

   Sin embargo, si este mismo consumidor tuviese, por ejemplo, las preferencias dadas por $u(q_1, q_2) = q_1 + q_2$, tendríamos

$$u^3 = 22 + 33 = 30 + 25 = u^0,$$

   y dicho consumidor no empeoraría ni mejoraría entre ambas situaciones.

   E incluso podríamos concluir que si el anterior consumidor fuese un individuo cuasilineal con el orden de preferencias dado por $u(q_1, q_2) = \ln q_1 + q_2$, entonces mejoraría en la situación t^3 con respecto a la situación t^0, ya que

$$u^3 = \ln 22 + 33 > \ln 30 + 25 = u^0.$$

   En definitiva, es evidente que para extraer una conclusión no ambigua necesitamos tener información exacta de los gustos del consumidor. ■

Ejercicio 3.19

Un consumidor que adquiere cantidades de tres bienes tiene un orden de preferencias representado por la función de utilidad $u(q_1, q_2, q_3) = (q_1 - 2)(q_2 - 1)^2 q_3$, se enfrenta a los precios dados por el vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y su renta es $m > 0$. En estas condiciones:

1. Obtener las funciones de demanda marshalliana de cada uno de los tres bienes.
2. Si en una situación inicial los parámetros son $\left(\mathbf{p}^0, m^0\right) = (5, 2, 10, 100)$ y, en una situación final, pasan a ser $\left(\mathbf{p}^1, m^1\right) = (8, 2, 6, 100)$, ¿qué sucede con el bienestar del consumidor? ¿Cómo podría cuantificarse la respuesta?

Resolución

1. Si, en aras de la simplificación, utilizamos la transformación monótona $U = \ln u = \ln(q_1 - 2) + 2\ln(q_2 - 1) + \ln q_3$ y resolvemos el problema

$$MAX_{(q_1,q_2,q_3)} \ \ln(q_1 - 2) + 2\ln(q_2 - 1) + \ln q_3, \text{ s.a: } p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \leq m,$$

obtenemos como demandas marshallianas

$$\left(q_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_2^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m), q_3^{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, m)\right) = \left(\frac{m + 6p_1 - p_2}{4p_1}, \frac{m - 2p_1 + p_2}{2p_2}, \frac{m - 2p_1 - p_2}{4p_3}\right).$$

2. Las cantidades demandadas en la situación inicial son las dadas por el vector

$$\mathbf{q}^0 = \left(\frac{32}{5}, 23, \frac{11}{5}\right),$$

mientras que en la situación final son las dadas por el vector

$$\mathbf{q}^1 = \left(\frac{73}{16}, \frac{43}{2}, \frac{41}{12}\right).$$

Al haberse incrementado p_1 y reducido p_3 no está claro el efecto neto sobre el bienestar del consumidor. Con todo, y dado que su renta no ha variado, podemos analizar si el "nivel de precios" (y con ello su poder adquisitivo) ha aumentado o disminuido. Una forma de hacerlo es mediante el índice de precios de Laspeyres, el cual se define como

$$L_p = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^0}{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^0} = \frac{\frac{552}{5}}{100} = 1,104$$

e indica que el nivel general de los precios ha aumentado un 10,4%, con lo cual el consumidor empeora.

La conclusión anterior puede ser correcta o no, porque uno de los problemas que plantean estos índices es que al ponderar por las cantidades demandadas inicialmente, no recogen las sustituciones —las cuales pueden ser importantes— generadas por los cambios de precios.[61] Esto puede desvirtuar las conclusiones derivadas del valor del índice de precios de Laspeyres.

[61] Nótese que si utilizamos los habituales índices de precios y cantidades, entonces $L_q = \frac{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^0\mathbf{q}^0} = 0,9998$ y $P_q = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^1}{\mathbf{p}^1\mathbf{q}^0} = 0,9058$. Por lo tanto, y dado que $V = 1$, llegamos al resultado de que $V > L_q > P_q$.

Veamos si éste es el caso tomando medidas del bienestar basadas en la posibilidad de mantener (o no) el nivel de utilidad a lo largo del tiempo, como por ejemplo la variación compensadora y el verdadero índice de precios asociado. La función de utilidad indirecta es

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p},m) &= \ln\left(\frac{m+6p_1-p_2}{4p_1}-2\right)+2\ln\left(\frac{m-2p_1+p_2}{2p_2}-1\right)+\ln\frac{m-2p_1-p_2}{4p_3} \\ &= \ln\frac{m-2p_1-p_2}{4p_1}+2\ln\frac{m-2p_1-p_2}{2p_2}+\ln\frac{m-2p_1-p_2}{4p_3} \qquad (162) \end{aligned}$$

y la función de gasto $e(\mathbf{p},u)$ es la inversa de (162). El nivel de utilidad inicial a precios $\mathbf{p}^0=(5,2,10)$ y renta $m^0=100$ es

$$u^0=\ln\frac{22}{5}+2\ln 22+\ln\frac{11}{5}=8,45$$

y el gasto mínimo m para alcanzar este nivel de utilidad a los nuevos precios $\mathbf{p}^1=(8,2,6)$ es el dado por

$$\begin{aligned} 8,45 &= \ln\frac{m-18}{32}+2\ln\frac{m-18}{4}+\ln\frac{m-18}{24} \\ &= \ln\left[\frac{m-18}{32}\left(\frac{m-18}{4}\right)^2\frac{m-18}{24}\right] \qquad (163) \end{aligned}$$

Tomando antilogaritmos en (163), resulta

$$4675,07=\frac{m-18}{32}\left(\frac{m-18}{4}\right)^2\frac{m-18}{24},$$

a partir de lo cual se obtiene $m=105,08$. El bienestar del consumidor se reduce, ya que se necesita más renta para mantener el mismo nivel de utilidad. En particular, la variación compensadora de la renta es

$$VCR=100-105,08=-5,08,$$

mientras que el verdadero índice de precios es igual a

$$V(u^0)=\frac{e\left(\mathbf{p}^1,u^0\right)}{e\left(\mathbf{p}^0,u^0\right)}=\frac{105,08}{100}=1,05.$$

La idea es que con la misma renta monetaria, el consumidor se enfrenta a un aumento del nivel general de precios del 5%, lo cual confirma la conclusión obtenida a partir del índice de precios de Laspeyres.

Otra posible cuantificación monetaria del cambio en el bienestar es la que resulta de tomar como referencia el nivel de utilidad de la situación final a precios $\mathbf{p}^1=(8,2,6)$ y renta $m^0=100$. Dicho nivel es

$$u^1=\ln\frac{41}{16}+2\ln\frac{41}{2}+\ln\frac{41}{12}=8,21$$

y el gasto mínimo para alcanzar esta utilidad a precios iniciales $\mathbf{p}^0 = (5, 2, 10)$ es

$$8,21 = \ln \frac{m-12}{20} + 2 \ln \frac{m-12}{4} + \ln \frac{m-18}{24},$$

con lo cual $m = 84,82$. Es decir, acceder a la combinación de bienes que se adquiere en la situación final tras la variación de precios es equivalente a que la renta se hubiese reducido en $100 - 84,82 = 15,18$. ■

Ejercicio 3.20

Consideremos un consumidor cuyas preferencias vienen representadas por la función de utilidad $u(q_1, q_2) = q_1 q_2$. Inicialmente, los precios de los bienes y la renta del consumidor adoptan los valores $\left(\mathbf{p}^0, m^0\right) = (5, 6, 300)$, mientras que, en una situación final, pasan a ser $\left(\mathbf{p}^1, m^1\right) = (6, 4, 264)$. Evaluar el cambio de bienestar del consumidor.

Resolución

Al encarecerse el bien 1, abaratarse el bien 2 y reducirse la renta monetaria del consumidor, no está claro el efecto neto sobre el bienestar del consumidor. Si analizamos el índice de precios de Laspeyres, $L_p = \frac{280}{300} = 0,93$, diríamos que los precios han disminuido "en general" un 7%. Dado que, por otra parte, $M = \frac{264}{300} = 0,88$, se tiene que $L_p > M$.

Esta conclusión, sin embargo, no necesariamente es correcta. De hecho, el argumento utilizado en el Ejercicio 3.19 desvirtúa en este caso la conclusión del índice de Laspeyres si lo comparamos con otras medidas de bienestar más correctas conceptualmente, tales como la VCR o el índice verdadero de precios. Dadas las funciones de demanda del consumidor[62] $(q_1^{\mathrm{m}}, q_2^{\mathrm{m}}) = \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right)$ y la función de utilidad indirecta $v(\mathbf{p}, m) = \frac{m^2}{4p_1p_2}$, el nivel de utilidad en la situación inicial es $u^0 = 750$, con lo cual el gasto para alcanzar dicho nivel de utilidad en la situación final es

$$750 = \frac{m^2}{96} \Rightarrow m = 268,33,$$

lo cual indica que el individuo empeora ya que mantener el nivel de utilidad le supone más renta de la que tiene. En concreto, la variación compensadora de la renta es

$$VCR = 264 - 268,33 = -4,33$$

y el "verdadero índice de precios" es

$$V\left(u^0\right) = \frac{268,33}{264} = 1,016,$$

es decir, con la renta monetaria que el consumidor tiene en la situación final es como si afrontase un incremento del nivel general de precios del $1,6\%$. Esta conclusión contradice, pues, la primera impresión obtenida a partir del índice de precios de Laspeyres. ■

[62] Véase el Ejercicio 3.1 para el caso en el que $\alpha = \beta = 1$.

Ejercicio 3.21

Consideremos una empresa competitiva cuya tecnología viene representada por la función de costes $c(q) = \frac{1}{2}q^2 + 4q + 2$. Si el precio de mercado del output que obtiene es p, determinar:

1. La función de oferta de dicha empresa.
2. El excedente del productor de la empresa.
3. El nivel de beneficio de la empresa

Resolución

1. Dada la existencia de un coste fijo, $F = 2$, es evidente que el contexto analítico en el que estamos es de corto plazo. La función de oferta de la empresa se define mediante la condición $p(q) = cma(q)$, esto es, $p = q + 4$, de donde se obtiene

$$q(p) = \begin{cases} p - 4, \text{ si } p > 4 \\ 0, \text{ si } p \leq 4. \end{cases}$$

2. El excedente del productor (EP) es el área delimitada por la recta definida por el precio unitario del producto y la curva de oferta de la empresa (o curva de costes marginales). En este caso,

$$\begin{aligned} EP(p) &= p \cdot q(p) - \int_0^{q(p)} (q + 4)\mathrm{d}q \\ &= p(p-4) - \left[\frac{1}{2}q^2 + 4q\right]_0^{q(p)=p-4} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(p-4)^2, \text{ si } p > 4 \\ 0, \text{ si } p \leq 4. \end{cases} \end{aligned} \tag{164}$$

3. Otro índice ampliamente utilizado para medir la utilidad de la empresa es el beneficio, el cual se define como

$$\begin{aligned} \pi(p) &= p \cdot q - c(q) \\ &= p(p-4) - \frac{1}{2}(p-4)^2 - 4(p-4) - 2 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(p-4)^2 - 2, \text{ si } p > 4 \\ -2, \text{ si } p \leq 4. \end{cases} \end{aligned} \tag{165}$$

Finalmente, comparando (164) y (165), se concluye que $EP = \pi + F$. ■